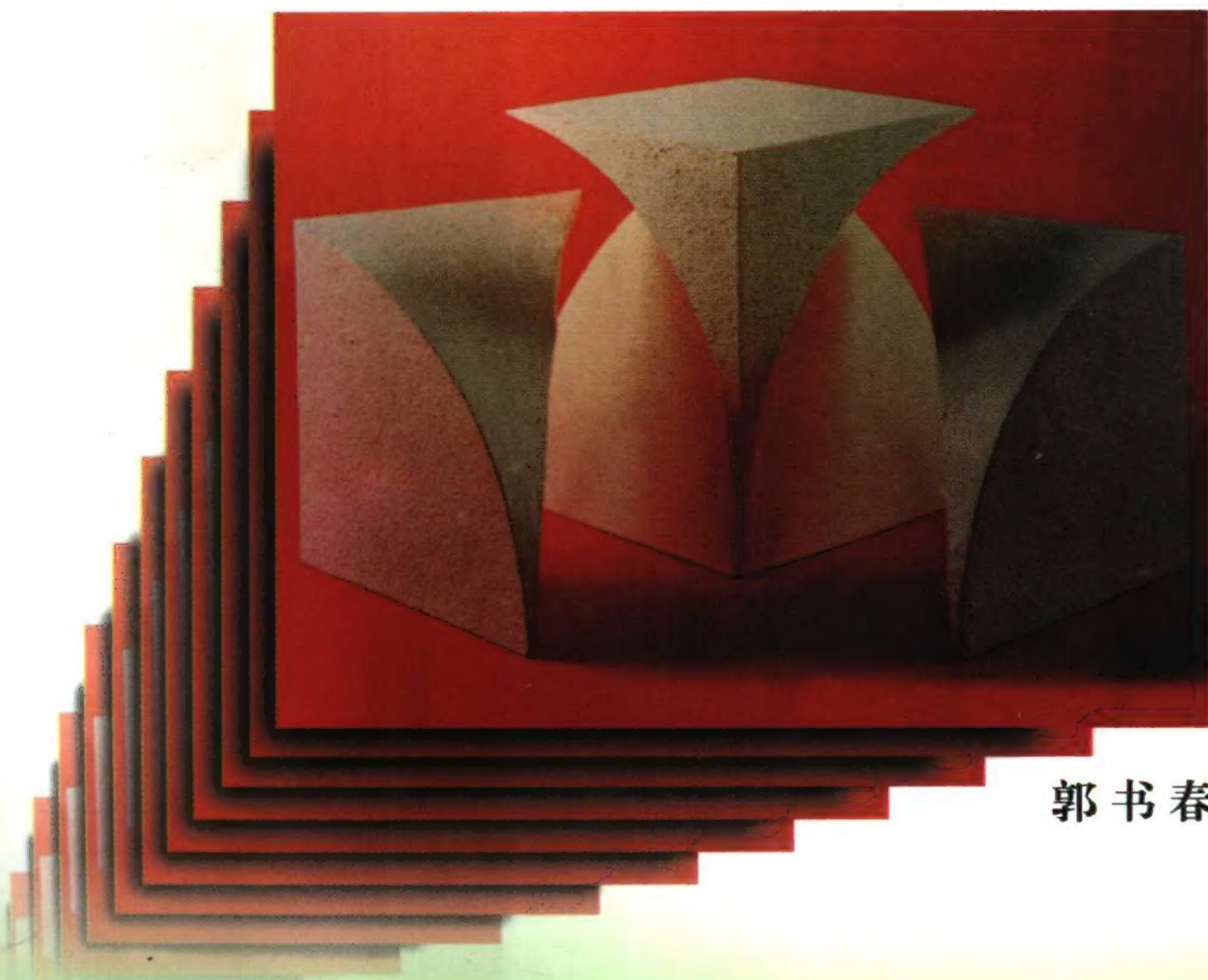
主编 任继愈

中国文化史知识丛书

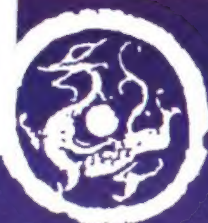
中国古代数学



郭书春

商务印书馆





中国文化史
知识丛书

中国古代数学

郭 书 春



商 务 印 书 馆
1997年·北京



图书在版编目(CIP)数据

中国古代数学/郭书春著．—增订版．—北京：商务印书馆，1997
(中国文化史知识丛书)
ISBN 7-100-02138-3

Ⅰ．中… Ⅱ．郭… Ⅲ．数学史-中国-古代-普及读物
Ⅳ．O112

中国版本图书馆CIP数据核字(96)第06534号

中国文化史知识丛书

ZHŌNGGUÓ GŪDÀI SHÙXUÉ

中国古代数学

郭书春

商务印书馆出版
(北京王府井大街36号 邮政编码100710)
新华书店总店北京发行所发行
中国科学院印刷厂印刷
ISBN 7-100-02138-3/G·288

1997年4月第1版　开本787×1092 1/32
1997年4月北京第1次印刷　字数89千
印数3 000册　印张6½ 插页5

定价：12.60元

《中国文化史知识丛书》

编辑委员会名单



甲骨文数字

西安出土西汉金属算筹

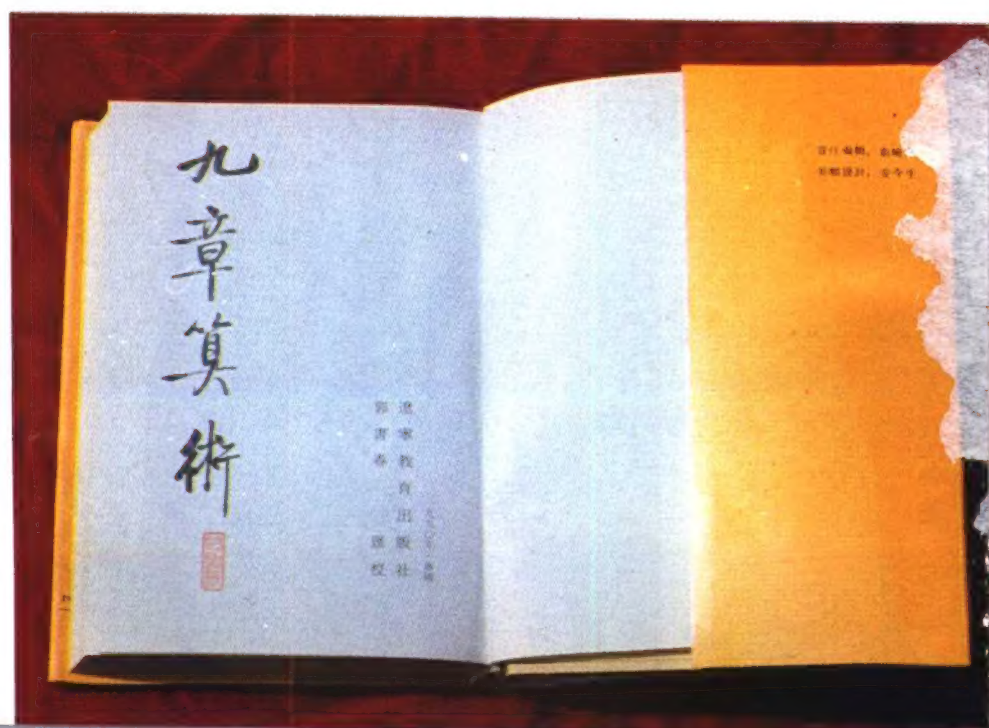


淳風等謹依密率爲田十畝二百五步八十八分步之八十七

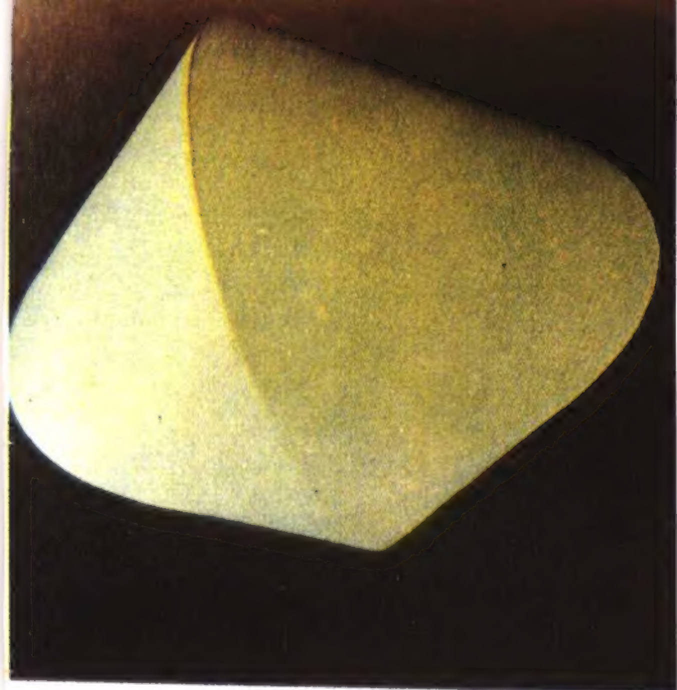
術曰半周半徑相乘得積步按半周爲從半徑爲廣故廣從相乘爲積步也假令圓徑二尺圓中容六弧之一面與圓徑之半其數均等令徑率一而弧周率三也又按爲圖以六弧之一面乘一弧半徑二因而六之得十二弧之冪若又割之次以十二弧之一面乘一弧之半徑四因而六之則得二十四弧之冪割之彌細所失彌少割之又割以至於不可割則與圓周合體而無所失矣弧面之外猶有餘徑以面乘徑則冪出弧表若夫弧之細者與圓合體則表無餘徑表無餘徑則冪不外出矣以一面乘半徑弧而裁之每輒自倍故以半周乘半徑而爲圓冪此以周徑謂至然之數非周三徑一之率也周三者從其六弧之環耳以推圓

刘徽割圆术原文

（宋刻《九章算术》）



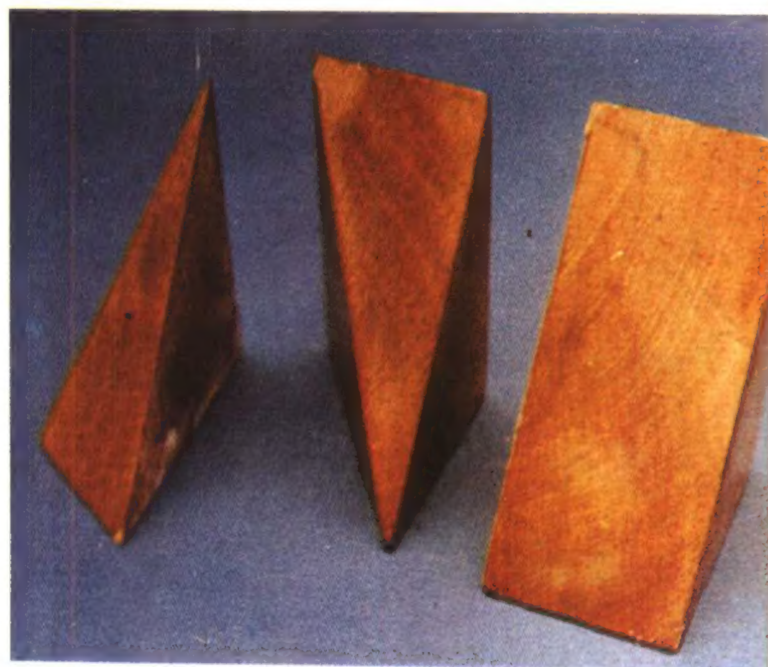
郭书春汇校《九章算术》



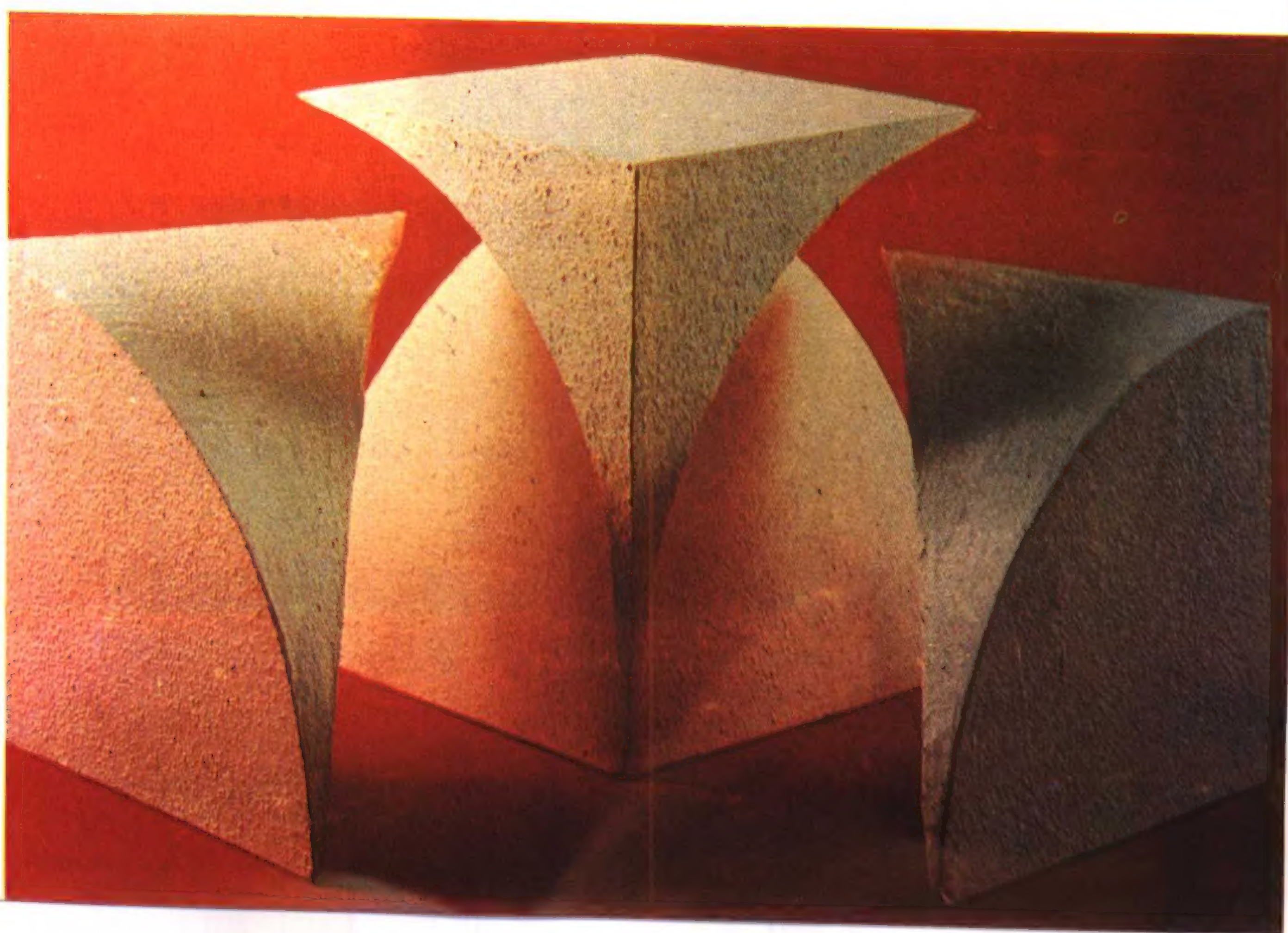
古代之立体模型

左牟合方盖

下左鳖臑　下中阳马　下右暂堵



祖冲之开立圆术立体之分解





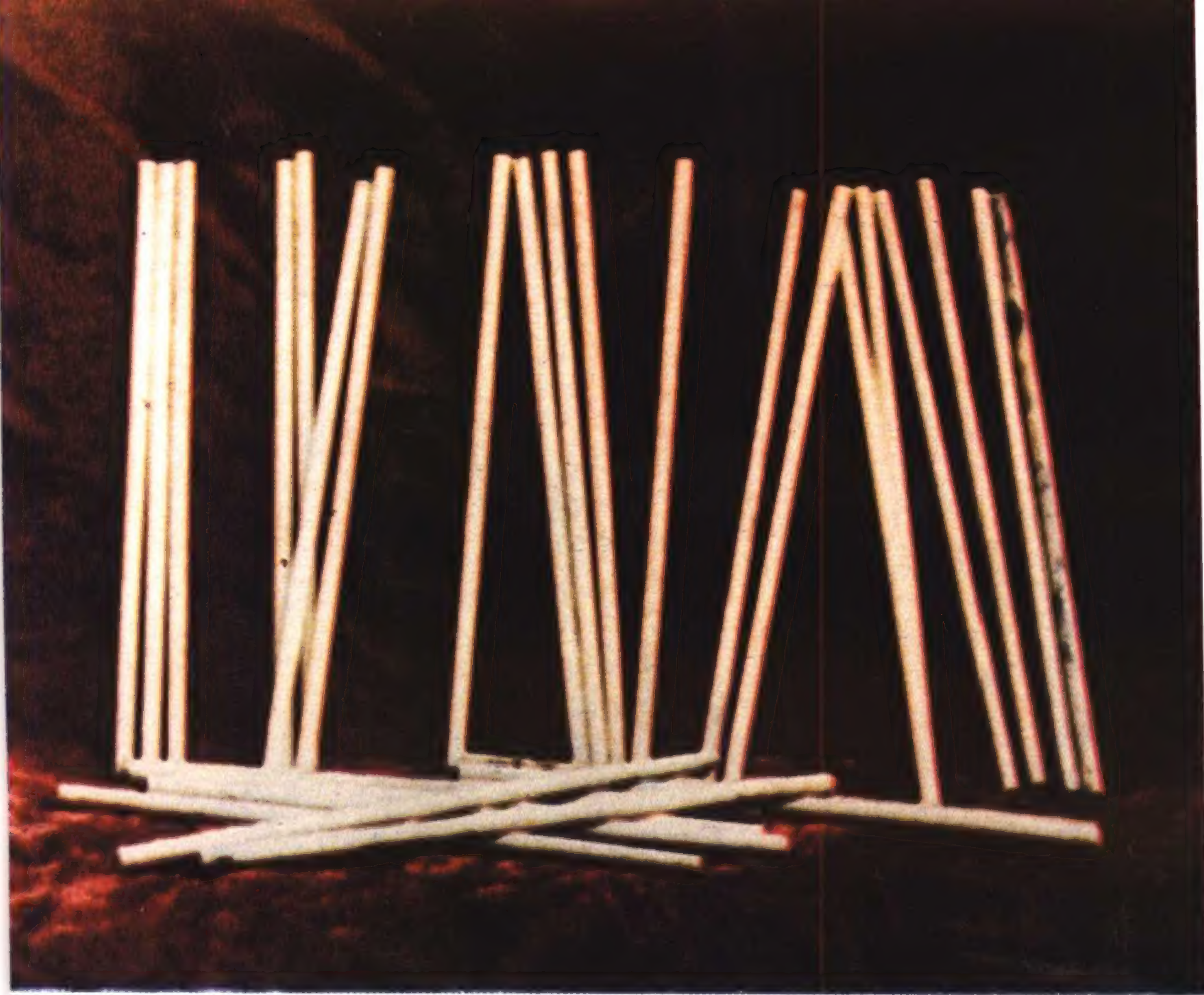
周公作九章之法以教天下图　（明刻黄龙吟《算法指南》）



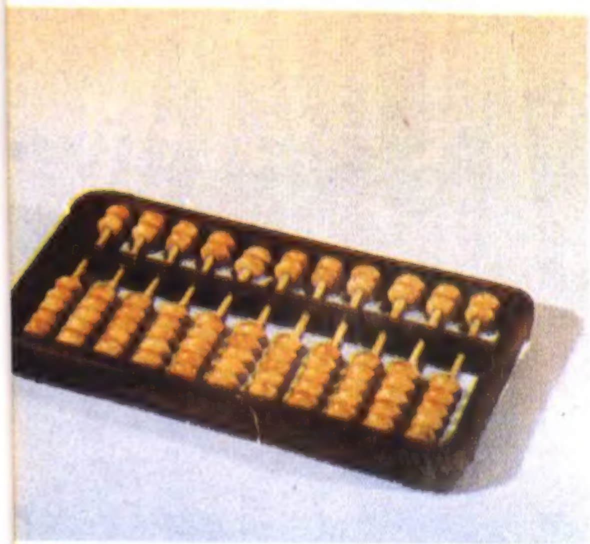
南宋秦九韶《数书九章》书影　（清宜稼堂本）

南宋杨辉《详解九章算法》（清宜稼堂本）

明《永乐大典》载贾宪三角图

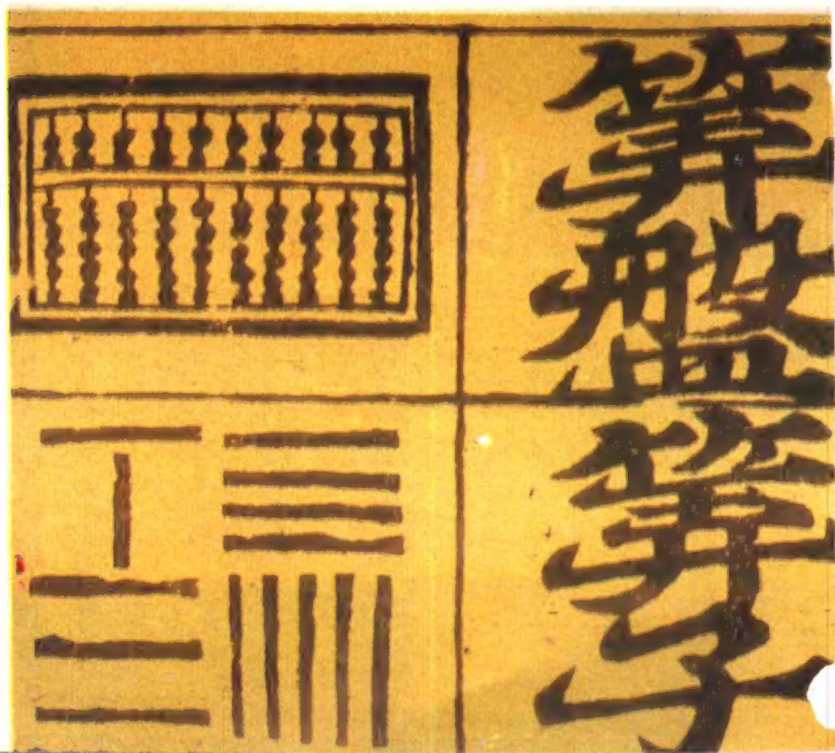


千阳出土西汉骨算筹



明代象牙算盘

算盘





宋刻算经



宋刻《九章算术》卷一



明程大位像 （康熙刻本《算法统宗》）



清李善兰像 （《格致汇编》）

编者献辞

中国是世界文明古国之一。古代世界曾经辉煌灿烂的文明国家，多数没有能够继续维持下去，有的中断了，有的随着文化重心的转移而转移到另外的地区。唯有中国这个国家，既古老又年轻。从原始社会到形成国家，有文字可考的历史有五千年以上。中国和中国文化屹立于世界之林，一脉相承，历久而弥新。

中国文化是个发展的、历史的范畴，具有包容性与持久性：除了时代差异外，尚有着地域与民族的差异性。它是在连绵几千年中，以华夏民族为主体的中华民族各地域文化（包括中原文化、齐鲁文化、荆楚文化、巴蜀文化、吴越文化、岭南文化、闽台文化等）和各民族文化（包括壮、满、蒙、回、藏等中国56个民族的文化）长期地、不断地交流、渗透、竞争和融合的结果。从这个意义上说，中国文化的发展是具体的、历史的，又是多地域、多民族、多层次的立体网络。中国文化是起源于上古贯穿到现在，在黄河、长江及

其周围地域形成并延续至今的中华民族共同的文化、共同的社会心理与习俗的结晶。

继承中国文化遗产，并不是对中国古代文化毫无选择地一概接受，而是要继承其优良传统，摒弃其封建糟粕。

今天中国正处在向现代化迈进的新时期。了解过去的优秀文化，正是为创造未来的新文化。这对于提高民族自尊心，增强民族凝聚力，有着极为重要的意义。青少年是国家的未来，民族的希望，对他们进行传统文化的教育，既是当务之急，又是长远的目标。要让中学生和具有中等文化程度的读者掌握中国文化史的基本知识，了解中国文化辉煌的历史，继承、发扬优良传统，为建设具有中国特色的社会主义新文化打下基础，这是一件宏伟的事业，也是我们编辑这部丛书的宗旨。

对文化层次较高的成年读者以至专家来说，个人的专业知识总归有限，本丛书对于成年人也不失为一种高品位的、可信赖的文化知识读物。

本丛书的前身有110个专题，涉及历史文化的各个方面，由商务印书馆、中共中央党校出版社、天津教育出版社、山东教育出版社联合出版。现由编委会对类目重新加以调整，确定了考

古、史地、思想、文化、教育、科技、军事、经济、文艺、体育十个门类，共100个专题，由商务印书馆独家出版。每个专题也由原先的五万多字扩大为八万字左右，内容更为丰富，叙述较前详备。希望这套丛书能多角度、多层次地反映中国文化的主流与特点，读者能够从中认识中国文化的基本面貌、了解中华民族的精神所系，这就是编者的最大愿望。

对于本丛书的批评及建议，我们将十分欢迎，力求使之趋于完善。

中国文化史知识丛书编辑委员会

一九九六年四月

中国文化史
知识丛书

目录



ZHONG GUO
WEN HUA SHI
ZHI SHI
CONG SHU

中国文化史
知识丛书

目录



ZHONG GUO
WEN HUA SHI
ZHI SHI
CONG SHU

中国文化史
知识丛书

目录



ZHONG GUO
WEN HUA SHI
ZHI SHI
CONG SHU

中国文化史
知识丛书

目录



ZHONG GUO
WEN HUA SHI
ZHI SHI
CONG SHU



中国古代数学综述

ZHONG GUO
WEN HUA SHI
ZHI SHI
CONG SHU

数学是中国古代最为发达的学科之一，通常称为算术，即“算数之术”。就是说，古代的术语算术对应于英文的*mathematics*，而不是*arithmetic*。在初等范围之内，它包括今天数学教科书的算术、代数、几何、三角等方面的内容。后来，算术又称为算学、算法，宋元开始使用“数学”一词。此后，算学、数学并用。1939年6月中国数学名词审查委员会确定用“数学”而不用“算学”。

历代数学家的数学著述正是数学进步的脚印。中国古代的数学著述通常称为算经，它们是数学成就的载体。因此，我们的综述着重介绍算经，兼及杰出的数学家。历代出现过多少算经，不得而知，西汉至宋元的算经大多亡佚，目前仅存20余种。明清留下的算经较多，可惜中国已经失去了数学大国的地位。笔者认为，中国古代数学的起源和发展大致分成这样几个明显的阶

段：春秋以前数学的萌芽，战国至两汉以《九章算术》为代表的数学框架的确立，魏晋至唐初的数学理论的奠基，宋元数学高潮，以及明朝衰落，明末以后以中西数学融会贯通为特点的复兴时期。

1 春秋前中国数学的萌芽

我们的先民在从野蛮走向文明的漫长历程中，逐渐认识了数与形的概念。出土的新石器时期的陶器大多为圆形或其他规则形状，陶器上有各种几何图案，通常还有三个着地点，都是几何知识的萌芽。先秦典籍中有“隶首作数”、“结绳记事”、“刻木记事”的记载，说明人们从辨别事物的多寡中逐渐认识了数，并创造了记数的符号。殷商甲骨文（公元前 14—前 11 世纪）中已有 13 个记数单字，最大的数是“三万”，最小的是“一”。一、十、百、千、万，各有专名。其中已经蕴含有十进位置值制萌芽。传说伏羲创造了画圆的“规”、画方的“矩”，也传说黄帝臣子倕〔chuí 垂〕是“规矩”和“准绳”的创始人。早在大禹治水时，禹便“左准绳”（左手拿着准绳），“右

规矩”(右手拿着规矩)(《史记・禹本纪》)。因此,我们可以说,“规”、“矩”、“准”、“绳”是我们祖先最早使用的数学工具。人们丈量土地面积,测算山高谷深,计算产量多少,粟米交换,制定历法,都需要数学知识。《周髀〔bǐ 婢〕算经》载商高答周公问,提到用矩测望高深广远。相传西周初年周公(公元前 11 世纪)制礼,数学成为贵族子弟教育中六门必修课程——六艺之一。不过当时学在官府,数学的发展是相当缓慢的。

春秋时期,随着铁器的出现,生产力的提高,中国开始了由奴隶制向封建制的过渡。新的生产关系促进了科学技术的发展与进步。此时王权衰微,畴人四散,私学开始出现。最晚在春秋末年人们已经掌握了完备的十进位置值制记数法,普遍使用了算筹这种先进的计算工具。人们已谙熟九九乘法表、整数四则运算,并使用了分数。

2 战国至两汉中国数学框架的确立

战国时期,各诸侯国相继完成了向封建制

度的过渡。思想界、学术界诸子林立，百家争鸣，异常活跃，为数学和科学技术的发展创造了良好的条件。尽管没有一部先秦的数学著作留传到后世，但是，人们通过田地及国土面积的测量，粟米的交换，收获及战利品的分配，城池的修建、水利工程的设计，赋税的合理负担，产量的计算，以及测高望远等生产生活实践，积累了大量的数学知识。据东汉初郑众记载，当时的数学知识分成了方田、粟米、差分、少广、商功、均输、方程、赢不足、旁要九个部分，称为“九数”。九数确立了《九章算术》的基本框架。

秦始皇结束了列国纷争，首次建立了中央集权的封建帝国，本应有利于数学的发展。但他的专制政策窒息了百家争鸣的学术空气。秦朝的残暴统治，尤其是焚书坑儒，给中国文化事业造成空前的浩劫。不久，刘邦利用推翻暴秦的农民起义，统一了中国，建立了汉朝，史称西汉。西汉政府与民生息，社会生产力得到恢复、发展，给数学和科学技术的发展带来新的活力，人们提出了若干算术难题，并创造了解勾股形、重差等新的数学方法。同时，人们注重先秦文化典籍的收集、整理。作为数学新发展及先秦典籍的抢

救工作的结晶，便是《九章算术》的成书。《九章算术》(省称《九章》)是中国最重要的数学经典，它之于中国和东方数学，大体相当于《几何原本》之于希腊和欧洲数学。在世界古代数学史上，《九章》与《原本》像两颗璀灿的明珠，东西辉映。

《九章》之前还有一部《周髀算经》，它本是一部以数学方法阐述盖天说的天文著作，一般认为于公元前1世纪成书。卷上记载了商高答周公问，陈子答荣方问。前者有勾股定理的特例$3^2+4^2=5^2$，后者有用勾股定理及比例算法测太阳高远及直径的内容。近年湖北省张家山出土的竹简《算数书》正在整理，其少广一问与《九章》少广章第1问基本相同，两者的关系有待于研究。

《九章》集先秦到西汉数学知识之大成。据东汉末大学者郑玄(公元127—200年)引东汉初郑众(？—公元83年)说，西汉在先秦九数基础上又发展出勾股、重差两类数学方法。魏刘徽说：《九章》是由九数发展而来的，由于秦朝焚书而散坏。西汉张苍(？—公元前152年)、耿寿昌(公元前1世纪)收集秦火遗残，加以整理删补，

便成为《九章算术》。方田章提出了完整的分数运算法则，各种多边形、圆、弓形等的面积公式；粟米章提出了比例算法；衰〔cuī 崔〕分[1] 章提出了比例分配法则；少广章给出了完整的开平方、开立方程序；商功章讨论各种立体体积公式及工程分配方法；均输章解决赋役中的合理负担，也是比例分配问题，还有若干结合西汉社会实际的算术杂题；盈不足章解决盈亏问题及可以用盈不足术解决的一般算术问题；方程章是线性方程组解法，并给出了正负数加减法则；勾股章由旁要发展而成，提出了勾股定理、解勾股形及若干测望问题的方法。全书以计算为中心，有90 余条抽象性算法、公式，246 道例题及其解法，基本上采取算法统率应用问题的形式。它的许多成就居世界领先地位，奠定了此后中国数学居世界前列千余年的基础。《九章》分类不甚合理，没有任何定义和推导，少数公式不准确，个别公式有错误，则是不容讳言的缺点。《九章》的框架、形式、风格和特点深刻影响了中国和东

---

[1] "衰"，意为由大到小按一定等级递减，而"衰分"则有定量分配之意。

方的数学。

《九章算术》成书后，注家蜂起。《汉书·艺文志》所载《许商算术》、《杜忠算术》（公元前1世纪）估计为研究《九章》的作品。东汉马续、张衡、刘洪、郑玄、徐岳、王粲等通晓《九章算术》，或为之作注。这些著作都未传世，从后来刘徽（今山东邹平人，生卒不详）《九章算术注》所反映的信息看，这些研究基本上停留在归纳验证《九章算术》的正确性方面，理论上未能在《九章》基础上作出长足进步。

3 魏晋至唐初中国数学理论体系的建立

《九章算术》之后，中国的数学著述基本上采取两种方式：一是为《九章算术》作注；二是以《九章算术》为楷模编纂新的著作。经过两汉社会经济和科学技术的大发展，到魏晋，中国封建社会进入一个新的阶段，庄园农奴制和门阀士族占据了经济政治舞台的中心。思想文化领域中，儒家的统治地位被削弱，谶纬迷信和繁琐的经学退出历史舞台，代之以谈三玄——《周易》、

《老子》、《庄子》为主的辩难之风。学者们通过析理，探讨思维规律，思想界出现了战国的百家争鸣以来所未有过的生动局面。与此相适应，数学家重视理论研究，力图把自先秦到两汉积累起来的数学知识建立在必然的可靠的基础之上。刘徽和他的《九章算术注》便是这个时代造就的最伟大的数学家和最杰出的数学著作。

大约与刘徽同时或稍前，有赵爽（又名婴，字君卿，生卒不详，估计是三国吴人）的《周髀算经注》，其可观者为“勾股圆方图”，用 600 余字概括了两汉以来勾股算术的成果。

刘徽《九章算术注》作于魏景元四年（公元 263 年），原十卷。前九卷全面论证了《九章》的公式、解法，发展了出入相补原理、截面积原理、齐同原理和率的概念，在圆面积公式和锥体体积公式的证明中引入了无穷小分割和极限思想，首创了求圆周率的正确方法，指出并纠正了《九章》的某些不精确的或错误的公式，探索出解决球体积的正确途径，创造了解线性方程组的互乘相消法与方程新术，用十进分数逼近无理根的近似值等，使用了大量类比、归纳推理及演绎推理，并且以后者为主。第十卷原名重差，

为刘徽自撰自注，发展完善了重差理论，此卷后来单行，因第一问为测望一海岛的高远，名之曰《海岛算经》。他还著有《九章重差图》一卷，已佚。刘徽生活在辩难之风兴起而尚未流入清谈的魏晋之交，受思想界“析理”的影响，对《九章算术》“析理以辞，解体用图”（《九章算术注·序》），并对各种算法进行总结分析，认为数学像一株枝条虽分而同本干的大树，发自一端，形成了一个完整的理论体系。刘徽博览群书，谙熟诸子百家，他不迷信古人，敢于创新，实事求是。对他未能解决的牟合方盖，坦诚直书，表示“以俟能言者”（《九章算术·少广章注》），表现了一位伟大学者寄希望于后学的坦荡胸怀。

《孙子算经》三卷，常被误认为春秋军事家孙武所著，实际上是公元400年前后的作品，作者不详。这是一部数学入门读物，给出了筹算记数制度及乘除法则等预备知识，其河上荡杯、鸡兔同笼等问题后来在民间广泛流传，“物不知数”题则开一次同余式解法之先河。张丘建（今山东人，生平不详）著的《张丘建算经》三卷，成书于北魏（5世纪下半叶）。此书补充了等差级数的若干公式，其百鸡问题是著名的不定方程

问题，后世十分重视。

《缀术》包含了祖冲之（公元 429—500 年）和儿子祖暅〔gèng 更〕之（一作祖暅，生平不详）的数学贡献。由于其内容深奥，隋唐算学馆学官（相当于今天大学数学系教授）读不懂，遂失传。据认为，将圆周率精确到八位有效数字、球体积的解决及含有负系数的二次、三次方程皆是其中的内容。祖冲之，字文远，祖籍范阳遒（今河北省涞源县）人。刘宋大明六年（公元 462 年）造大明历，使用岁差，改革闰制。他的改革遭到守旧派官僚戴法兴的反对，祖冲之不畏权势，据理驳斥，坚持了反对迷信，不虚推古人，实事求是的科学精神。他对机械深有研究，制造过水碓、水磨、指南车、千里船、漏壶等，并著《安边论》、《述异记》等。祖暅之，字景烁。从小爱好数学，巧思入神，极其精微。专心致志之时，雷霆不能入。有一次走路时思考问题，仆射徐勉迎面而来竟然没有发现，头撞到徐勉身上，徐勉唤他，他才知道撞了人。其父的《大明历》经他的努力在梁朝颁行。

北周甄鸾（今河北无极人，生卒不详）有三部数学著作传世，即《五曹算经》、《五经算术》、

《数术记遗》。前二部内容浅近，无足道者。《数术记遗》一卷，传本题（东）汉徐岳撰、北周甄鸾注，近人多以为系甄鸾自撰自注，假托徐岳。书中记载了三种大数进位制及 14 种算法，其中珠算虽不同于元明的珠算盘，然开后者之先河，似无可疑。

隋唐是中国封建社会经济政治文化的鼎盛时期，然而数学上除天文历法研究中刘焯（公元 544—610 年）创造等间距内插公式（7 世纪初）和僧一行（公元 683—727 年）创造不等间距内插公式（8 世纪）外，几无创造，数学成就及理论水平远远低于魏晋南北朝。唐初王孝通（生卒不详）撰《缉古算经》一卷，解决了若干复杂的土方工程及勾股问题，且都用三次或四次方程解决，是为现存记载三次、四次方程的最早著作。然而，《缉古算经》未必是高于《缀术》的著作。王孝通是历算博士，曾任太史丞，在天文历法方面是保守的。他在《上〈缉古算经〉表》中指责《缀术》全错不通，于理未尽，大约他与当时别的数学家一样读不懂《缀术》。他自诩他的《缉古算经》千金不能排其一字，他一旦瞑目，其方法后人莫晓。科学家不必作谦谦君子，但如此狂妄，也是

不足取的。

、 隋唐统治者在国子监设算学馆，置算学博士、助教指导学生学习。唐李淳风等奉敕于显庆元年（公元656年）为《周髀算经》、《九章算术》、《海岛算经》、《孙子算经》、《夏侯阳算经》、《缀术》、《张丘建算经》、《五曹算经》、《五经算术》、《缉古算经》等十部算经作注，作为算学馆教材，这就是著名的《算经十书》，该书是中国古代数学奠基时期的总结。李淳风等注释保存了许多宝贵资料，但注释水平并不高。由于种种原因，算学馆实际未培养出像样的数学家。

4 唐中叶至宋元中国数学的高潮

经过盛唐的大发展，唐中叶之后，生产关系和社会各方面逐渐产生新的实质性变革，到10世纪下半叶，赵匡胤建立宋朝，统一中国，中国封建社会进入一个新的阶段，土地所有制以国有为主变为私有为主，租佃农民取代了魏唐的具有农奴身份的部曲、徒附。农业、手工业、商业和科学技术得到更大发展。中国古代四大发明，

有三项——印刷术之广泛应用及活字印刷，火药用于战争，指南针用于航海——完成于唐中叶至北宋。宋秘书省于元丰七年（公元1084年）首次刊刻了《九章算术》等十部算经（时《夏侯阳算经》、《缀术》已失传，因8世纪下半叶一部韩延《算术》开头有“夏侯阳曰”云云而误认为是前者而刻入，后者只好付之阙如），是世界上首次出现的印刷本数学著作。后来南宋数学家鲍澣之翻刻了这些刻本，有《九章算术》（半部）、《周髀算经》、《孙子算经》、《五曹算经》、《张丘建算经》五种及《数术记遗》等孤本流传到现在，是目前世界上传世最早的印刷本数学著作。宋元数学家贾宪、李冶、杨辉、朱世杰的著作，大都在成书后不久即刊刻。数学著作借助印刷术得以空前广泛的流传，对传播普及数学知识，其意义尤为深远。

宋元数学高潮早在唐中叶已见端倪。随着商业贸易的蓬勃发展，人们改进筹算乘除法，新、旧《唐书》记载了大量这类书籍，可惜绝大多数失传，只有韩延（生平不详）《算术》（8世纪）以《夏侯阳算经》的名义流传下来，该书提出了若干化乘除为加减的捷算法，并在运算中使用

了十进小数，极可宝贵。

11 世纪上半叶贾宪（生平不详）撰《黄帝九章算经细草》，是为北宋最重要的数学著作。贾宪曾任左班殿直（低级武官），是当时著名天文学家、数学家楚衍的学生。还著有《算法敩古集》二卷，已佚。他将《九章算术》未离开题设具体对象甚至数值的术文大都抽象成一般性术文，提高了《九章算术》的理论水平；他对某些类型的数学问题进行概括，比如提出开方作法本源即贾宪三角，作为他提出的立成释锁（即开方）法的算表，这是开方问题的纲；他提出了若干新的重要方法，其中最突出的是创造增乘开方法，并提出了开四次方的程序。贾宪的思想与方法对宋元数学影响极大，是宋元数学的主要推动者之一。《黄帝九章算经细草》因被杨辉《详解九章算法》抄录而大部分保存了下来（阙卷一、二及卷三上半部，卷五的一部分）。

大科学家沈括（公元 1031—1095 年）对数学有独到的贡献。在《梦溪笔谈》中首创隙积术，开高阶等差级数求和问题之先河，又提出会圆术，首次提出求弓形弧长的近似公式。

12世纪北宋刘益（生平不详）撰《议古根

源》，亦失传。杨辉《田亩比类乘除捷法》引用了它的若干题目与方法。《缀术》失传之后，开方式的系数仍皆为正数，刘益突破了这个限制，首先引入负系数方程，并创造了益积开方术与减从开方术求其正根，杨辉誉之为“实冠前古”。

1127 年金朝入主中原，赵宋南迁，史称南宋。1234 年，蒙古贵族灭金，后来建立元朝。1279 年元灭南宋，统一全国。13 世纪中叶至 14 世纪初，是宋元数学高潮的集中体现，也是中国历史上留下重要数学著作最多的半个世纪，并形成了南宋统治下的长江中下游与金元统治下的太行山两侧两个数学中心。

南方中心以秦九韶、杨辉为代表，以高次方程数值解法、同余式解法及改进乘除捷算法的研究为主。北方中心则以李冶为代表，以列高次方程的天元术及其解法为主。元统一中国后的朱世杰，则集南北两个数学中心之大成，达到了中国筹算的最高水平。

1247 年秦九韶撰成《数书九章》18 卷。秦九韶，字道古，自称鲁郡(今山东省)人，约 1202 年生于普州安岳县(今四川省)。他生活在宋元激烈斗争的南宋末年，并卷入了南宋统治集团战

和两派的斗争，支持抗战派吴潜，屡遭刘克庄等人弹劾。贾似道专权后被贬到梅州（今广东省），不久（约公元1261年）死于任所，并在死后被追随贾似道的周密丑诋不堪。他天资聪明好学，对数学、天文、土木建筑、诗词、音律、弓马等都十分精通。他多次呼吁统治者施仁政，并把数学知识看成开源截流、施仁政、利国利民的有力工具。《数书九章》分大衍、天时、田域、测望、赋役、钱谷、营建、军旅、市易九类81题，其成就之大，题设之复杂都超过以往算经，有的问题有88个条件，有的答案多达180条，军事问题之多也是空前的，反映了秦氏对抗元战争的关注。大衍总数术系统解决了一次同余式组解法；正负开方术把以增乘开方法为主导的求高次方程正根的方法发展到十分完备的程度，有的方程高达十次；线性方程组解法完全以互乘相消法取代直除法；提出了与海伦公式等价的三斜求积公式；使用了完整的十进小数表示法，等等，都是其杰出成就。

杨辉共撰五部数学著作，传世的有四部，居元以前数学家之冠。杨辉，字谦光，钱塘（今杭州市）人，生平不详，只知在今江浙一带管钱粮，为

政清廉。与其他大家比较，他的著作偏重于教育与普及。1261年，杨辉在刘徽注、李淳风等注释、贾宪细草的《九章算术》基础上作解题、比类，并补充了图、乘除、纂类三卷，是为《详解九章算法》，今图、乘除、方田、粟米、衰分上半部、商功之一部分已佚。商功章的比类中的垛积术发展了沈括的隙积术；"纂类"则打破了《九章算术》的分类格局，按方法分成乘除、互换、合率、分率、衰分、叠积、盈不足、方程、勾股九类。1262年又撰《日用算法》，着重于改进乘除捷算法，只有少量题目保存下来。1274年撰《乘除通变本末》三卷。卷上的"习算纲目"是一个从启蒙到《九章》主要方法的数学教学计划。本书还总结了九归等乘除捷算法及其口诀。次年编纂《田亩比类乘除捷法》二卷，引用了刘益的方法与题目，批评了《五曹算经》四不等田求法的错误。同年，编纂《续古摘奇算法》二卷，对纵横图即幻方研究颇有贡献。后三部书又常合称为《杨辉算法》。

十二、十三世纪，北方出现了许多天元术著作，大都失传，流传至今的最早的以天元术为主要方法的著作是李冶的《测圆海镜》12卷（公元

1248 年)、《益古演段》三卷(公元 1259 年)。李冶(公元 1192—1279 年),字仁卿,号敬斋,真定栾城(今河北省)人,生于大兴(今北京市)。其父为官清廉正直,李冶自幼受到良好的教养,且爱好数学,青年时便成为名重中原的学者,金词赋科进士。入元,遂隐居于忻、崞〔guō 郭〕(今山西省北部)一带,在极为艰苦的条件下研究数学及各种学问,常粥饘〔zhān 毡〕不继,而聚书环堵。1251 年起,主持封龙书院(今河北省)。1257、1260 年两次受到元主忽必烈召见,发表了立法度,正纲纪,进君子,退小人,减刑罚,止征战,反对种族偏见的政治主张。他被聘为翰林学士。然而他羞于作唯天子、宰相之命是听的御用文人,不久便以老病为辞回到封龙山。他一生文史著述颇多,仅存《敬斋古今黈》。《测圆海镜》在洞渊九容基础上考虑了勾股形与圆的 10 种基本关系,在卷二—十二中就 15 个勾股形与圆的关系提出了 170 个求圆径长的问题,答案当然都相同。这些问题大都要用天元术列出方程。卷一是全书的理论基础,包括圆城图式、识别杂记等部分。圆城图式以天、地、乾、坤等汉字表示点,是个创举。识别杂记提出 692 条公式,除八条外都

是正确的，集历代勾股形与圆的关系研究之大成。《益古演段》64问，这是一部用天元术阐释蒋周（可能是北宋人）《益古集》的方程列法的著作。其中保存了《益古集》的若干题目和旧术（方法）。

朱世杰有两部重要著作《算学启蒙》（公元1299年）、《四元玉鉴》（公元1303年）传世。朱世杰，字汉卿，号松庭，燕山（今北京市）人，生平不详。他在13世纪末以数学名家周游全国20余年，向他学习数学的人很多。《算学启蒙》20门，259问，包括了从乘除及其捷算法到增乘开方法、天元术等当时数学各方面的内容，形成了一个较完整的体系。《四元玉鉴》24门，288问，卷首给出古法七乘方图（改进了的贾宪三角）等四种五幅图，以及天元术、二元术、三元术、四元术的解法范例。创造四元消法，解决了多元高次方程组问题，以及高阶等差级数求和问题，高次招差法问题，是本书最大的贡献。此书是中国古代水平最高的数学著作。

杨辉、朱世杰等人对筹算乘除捷算法的改进、总结，导致了珠算盘与珠算术的产生（大约在元中叶），完成了我国计算工具和计算技术的

改革。元中后期，又出现了《丁巨算法》、贾亨《算法全能集》、何平子《详明算法》等改进乘除捷算法的著作。

5 明清数学——从衰落到艰难的复兴

元中叶之后，中国数学急剧衰落，元末的几部著作只是对乘除捷算法有所改进。明永乐年间（公元 1403—1425 年）修《永乐大典》，将前此的中国数学著作按起源、各种数学方法及音义、纂类等分类抄录。汉唐宋元数学著作在明代大都散佚，清中叶修《四库全书》，中国古算书多赖此重新面世。

明代八股取士，思想禁锢严重，学者们很少留心数学。顾应祥、唐顺之是明代数学大家，全然不懂天元术和增乘开方法。景泰元年（公元 1450 年）吴敬撰《九章算法比类大全》十卷，收集历代应用题，亦抛弃了增乘开方法和天元术。元明之后，随着筹算捷算法的完备，珠算术产生并得到普及，明朝出现了一批有关珠算的著作。其最著者为程大位的《算法统宗》（公元1592

年),凡 17 卷,595 问。此书适应商业发展的需要,以珠算为主要计算工具,并载有珠算开方法。此书在以后二、三百年间被多次翻刻、改编,流传之广是罕见的。程大位,字汝思,号渠宾,休宁(今黄山市屯溪区)人,曾在长江中下游地区经商,注意收集算经和数学问题,晚年撰成此书。

16 世纪末,利玛窦等欧洲传教士来华,与徐光启等一起翻译《几何原本》等著作。后来,传教士们又引入了三角学、对数等西方初等数学,从此,中国数学开始了中西会通的阶段。清朝 260 余年,留下数学著作极多,都在不同程度上融会中西数学。

清宣城梅文鼎(公元 1633—1721 年)潜心于中西数学研究,著述甚多,其孙梅瑴成将他的著作编辑成《梅氏丛书辑要》60 卷,其中数学著作 13 种 40 卷,内容遍及当时中国数学的各个门类,对清朝数学影响极大。

康熙皇帝爱好数学,他御定由梅瑴成、何国宗、明安图、陈厚耀等编纂的《数理精蕴》53 卷,全面系统地介绍了当时传入的西方数学知识。上编立纲明体,为数理本源、几何原本、算术原

本等五卷；下编分条致用，为实用数学和借根方比例，以及对数、三角函数等40卷，表4种8卷，同样对清朝数学产生了巨大影响。此书于雍正元年(公元1723年)印行。

1723年，雍正帝即位，认为传教士不利于自己的统治，除少数供职于钦天监者外，将传教士悉数赶到澳门。此后，西学的传入遂告一段落，中国数学家一方面消化前此传入的数学知识，一方面忙于整理中国古典数学著作。

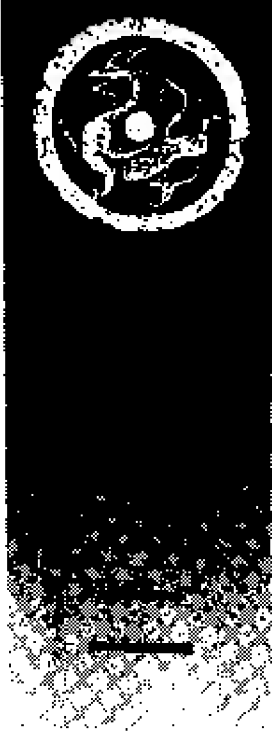
1773年乾隆帝决定修《四库全书》，戴震(公元1724—1777年)从《永乐大典》中辑出《周髀算经》、《九章算术》、《海岛算经》、《孙子算经》、《五曹算经》、《五经算术》以及赝本《夏侯阳算经》等七部汉唐算经，并加校勘，《数书九章》、《测圆海镜》、《四元玉鉴》等久佚的宋元算书也陆续辑出或发现，从此掀起了乾嘉时期(公元1736—1820年)研究整理中国古典数学的热潮。古书注释以李潢(？—公元1812年)《九章算术细草图说》、罗士琳(公元1789—1853年)《四元玉鉴细草》影响较大。而开创性的研究则以焦循(公元1763—1820年)《里堂学算记》、汪莱(公元1768—1813年)《衡斋算学》、李锐(公

元 1768—1817 年)《李氏算学遗书》最为有名。

18 世纪初，法人杜德美(公元 1668—1720 年)传入牛顿、格雷果里创造的三个三角函数的级数展开式。后来，三角函数和对数函数展开式的研究成为中国数学家的重要课题。明安图(17 世纪末至 18 世纪 60 年代)、董祐诚(公元 1791—1823 年)、项名达(公元 1789—1850 年)、戴煦(公元 1805—1860 年)等都作出了杰出贡献。李善兰(公元 1811—1882 年)的《方圆阐幽》、《弧矢启秘》、《对数探源》(公元 1845 年)在三角函数与对数函数的研究上取得了更大的成就。他创造的尖锥术提出了几个相当于定积分的公式，在接触西方微积分思想之前独立地接近了微积分学。李善兰，字壬叔，号秋纫，浙江海宁人。幼年即嗜好数学，30 余岁即获创造性成果。

1840 年，列强用大炮轰开了清朝闭关自守的大门，中国逐渐沦为半封建半殖民地社会。西方数学以前所未有的规模大量传入。1852 年李善兰到上海，与英国传教士伟烈亚力(公元 1815—1887 年)合译《几何原本》后九卷、《代数学》13 卷、《代微积拾级》18 卷等许多西方数学

著作，后者是中国第一部微积分学译著。后来，华衡芳（公元 1833—1902 年）与英人傅兰雅合译了《代数术》、《微积溯源》、《三角数理》、《决疑数学》等书，后者是中国第一部概率论译著。他们创造的许多术语至今还在使用。李善兰还融会中西，著述颇丰。《椭圆正术解》等四种是关于圆锥曲线的研究，《级数回求》等是关于幂级数的研究，而《垛积比类》则在朱世杰基础上系统解决了高阶等差级数求和问题，并提出了著名的李善兰恒等式。1872 年撰《考数根法》，证明了费尔马小定理，提出了素数判定法则。他的著作汇集为《则古昔斋算学》，包括 14 种科学著作。李善兰是开展现代数学研究的第一位中国数学家。然而，总的说来，时处清末，经济衰落，社会动荡，有志于现代数学的人没有与现代工程技术结合的条件，不可能有大量可观的成果，而士大夫阶层更多的人抱有西学为我中华所固有的偏见，不求甚解。此后不久，尤其是维新变法和新文化运动之后，中国古代数学传统基本中断，中国数学研究纳入了统一的现代数学。20 世纪是中国数学复兴的世纪，人们期待，在下个世纪中国将重新取得数学大国的地位。



记数法与计算工具

ZHONG GUO

WEN HUA SHI

ZHI SHI

CONG SHU



越的十进位置值制记数法和方便的计算工具算筹是中国古代数学长于计算并取得辉煌成就的前提条件。

1 结绳及甲骨文数字

人们对数的认识经历了漫长的过程。最先人们只能数出一个人、二个人；一只羊、二只羊。有的原始部落不久前还只能数到五，五以上就称为多。当人们用一个数字，比如五，既可以表示五个人，又可以表示五只羊或别的什么东西的时候，才初步完成了数概念的抽象。《世本》说“隶首作数”。相传隶首是黄帝的臣子，是时中国已进入新石器时代，产生抽象的数的概念是可以理解的。《周易·系辞》说“上古结绳而治，后世圣人易之以书契”。云南有的少数民族 50 年代仍沿习结绳、木刻记数。

随着文字的萌芽与发展，也出现了记数文字。公元前三四千年的西安半坡遗址和公元前近两千年的二里头遗址陶文中有|，‖，|||，||||，╳、㐅，∧、个，十，八，卄等数字，分别表示1，2，3，4，5，6，7，8，70。殷墟甲骨文卜辞中有许多数字，其中13个记数单字是：

一	二	三	亖	㐅	∩	∧	十
1	2	3	4	5	6	7	
)(	𠁽	丨	百	百	千	万	
8	9	10	100		1000	10000	

前四个是象形文字，其他几个多数人认为是假借字，如㐅是午，∩、∧是入，十是切，)(是分，𠁽是肘（一说象蛇形），万是虿，象蝎子。百是“一白”，千是“一人”的合文。十、百、千、万的倍数用合文，如、∪、Ш、𠄡、𠁾、𦣻、𦣻、𠦃、𠦄、𢦒分别是20、30、50、80、200、800、2000、8000、30000。甲骨文用九个数字与四个位置值符号，可以表示大到成万的任何自然数，已有位置值制萌芽。

2 算筹

算筹产生于何时，无可靠记载。《老子》说“善数不用筹策”，说明在春秋末年以前筹（策）就是人们的主要计算工具。算筹记数采取纵横两式：

纵式	𝍠	𝍡	𝍢	𝍣	𝍤	𝍥	𝍦	𝍧	𝍨
横式	𝍩	𝍪	𝍫	𝍬	𝍭	𝍮	𝍯	𝍰	𝍱
	1	2	3	4	5	6	7	8	9

其记数制度的完整表述出现在《孙子算经》中：“凡算之法，先识其位。一纵十横，百立千僵，千十相望，万百相当。”《夏侯阳算经》又补充了“满六已上，五在上方，六不积算，五不单张”。就是说用上述符号，以及用空位表零，则任何一个自然数都可以表示出来，比如 1991 便是𝍩𝍨𝍱𝍠，它完全采用十进位置值制，这是当时世界上最简便的计算工具，最先进的记数制度，比古巴比伦的六十进位置值制方便，比古希腊、罗马的十进非位置值制先进。许多学者认为印度——阿拉伯数字的创造，借鉴于中国古代的十进位置

值制记数法。根据刘徽的记载，负数产生后，用红筹表正数，黑筹表负数，“或以邪正为异”。宋元算书算草中通常在最后一个有效数字上加一斜线表示负数。

算筹通常用竹，也有用木、骨、石制成的。《汉书》载：“其算法用竹，径一分，长六寸”，分别合今天0.23cm与13.8cm，陕西千阳、旬阳发现的算筹证实了这种记载。但是算筹太长，布算面积过大，截面为圆形，容易滚动。随着计算的发展，人们逐渐缩短算筹长度，并使截面由圆变方。石家庄出土东汉算筹，截面就为方形，长度已缩短为7.8—8.9cm。

用算筹进行计算，便是筹算。中国古代数学的辉煌成就，大都借助于算筹与筹算取得的。

3 珠算盘

自唐中叶至宋元时期，人们不断改进筹算，创造了许多乘除捷算法和口诀（见下节）。这便产生了新的矛盾：嘴唸口诀很快，手摆算筹很慢，得心不能应手。创造新的计算工具成为迫切需要，珠算盘便应运而生。《数术记遗》中的珠

算，算珠不穿档，且无口诀，实际上不如筹算方便。现在使用的珠算盘产生于何时，自清初以来学术界争论很多。有人认为有北宋算珠出土，《清明上河图》赵家药铺柜台上有一算盘。也有人认为算珠出土土层有问题，赵家柜台上是一钱板，而非算盘，坚持认为珠算盘产生于元末明初。我们认为，使用口诀并取代算筹为主要计算工具的珠算盘的产生应在元中叶以后。珠算盘至今在中国乃至东亚、东南亚各国人民的生产生活中发挥着巨大作用。

4 〇与数码

中国古代没有笔算，筹算中用空位表示〇，空位是一种没有笔划的符号。宋元算书中多有详草。详草中的数码是借用筹式数字加一个表〇的符号而成的。13 世纪 40 年代被分裂在中国南北的秦九韶、李冶使用了大体一致的数码。北方李冶的数码是：

𝍠 𝍡 𝍢 𝍣 𝍤 𝍥 𝍦 𝍧 𝍨 〇

𝍩 𝍪 𝍫 𝍬 𝍭 𝍮 𝍯 𝍰 𝍱 〇

南方的数码则将𝍣(𝍬)改作×，将𝍤改作ȯ，将

𝍣(𝍰)改作〤(〤)，其余同上。印度阿拉伯数字用“0”表示零，中国用“〇”，这个符号是中国人独创的。原来古籍中有用□表示脱文的习惯，书写的方便，逐渐变成“〇”形，《金史》大明历有“四百〇三”等数字。明代商业的发展，产生了暗码，与南宋符号基本相同，只是书写迅速，将〥变成[illegible]，〤变成义，这种暗码一直沿用到本世纪。



算术运算

ZHONG GUO
WEN HUA SHI
ZHI SHI
CONG SHU

现传算经都未讲到筹算的整数加减法则，大约是学习这些算经前必须通晓的。各种算经中涉及到的算术运算有乘除法，分数与小数的四则运算，各种比例算法及盈不足术。而率与齐同原理是各种运算的纲纪。

1 九九表与乘除法则

乘除法法则要用到九九表。《管子》与刘徽都谈到伏羲作九九之术。九九之术就是九九表，唐宋间又引申为数学的代称。古代的九九表从“九九八十一”起到“二二如四”止，故名。战国末《吕氏春秋》、汉初《韩诗外传》等典籍还记载了齐桓公设庭燎以九九招贤的故事，可见九九表是当时人们的常识。

早在先秦人们已经谙熟乘除法则。据《孙子

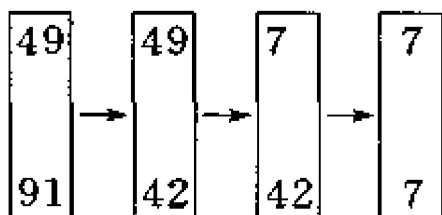
算经》记载，二数相乘，作三行布算。上、下为相乘数，中行为积。将下数向左移，使下数末位与上数首位相齐，以上数首位自左向右乘下行各数，相加后放入中行。去掉上行首位，下数右移一位，以上数次位自左向右乘下行各数，加入中行，如此类推，便得到乘积。

除法是乘法的逆运算。被除数称为实，放在中行，除数称为法，在下行，除的过程称为“实如法而一”。“实”源于被分的实在的东西，法是法式、标准的意思，这句话的意义是：实中有等于法的数，便得一，因此，实中有几个法便得几。使法、实首位相齐（如实与法相齐部分小于法，则将法向右移一位），议得商数首位，放于上行，从左向右乘法的各数，随即减实。然后将法向右移一位，再议商的次位，重复上述步骤，一直进行到法、实个位相齐。如实不尽，便以余数为分子，法为分母命名一个分数。

2 分数与小数

刘徽说：“物之数量，不可悉全，必以分言之。”先秦典籍和《周髀》中已大量使用分数，而

分数的完整理论则出现在《九章》方田章。首先是约分法则：分子、分母能同时被 2 整除，则先被 2 除。不能被 2 整除，则在旁边使分子、分母以少减多(即从多中减去少)，辗转相减，求其最大公约数(称为等数)，以此约之。这种方法与欧几里得求最大公约数的方法一致。如方田章第 6 题化简分数$\frac{49}{91}$：



7 便是最大公约数，以 7 约分子、分母：$\frac{49}{91}=\frac{7}{13}$。

分数加法称为合分，减法称为减分，其法则是：分子互乘分母，相加(减)作为实，分母相乘作为法，实如法而一。即 $\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}\pm\frac{cb}{db}=\frac{ad\pm bc}{bd}$。这里用到通分，但未用最小公倍数作分母。

分数乘法称为乘分，法则是：分母相乘为分母，分子相乘为分子。即$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$，与今无异。

分数除法叫经分。《九章》将实与法通分，使分子相除：$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}\div\frac{cb}{db}=\frac{ad}{bc}$。刘徽提出了颠

倒相乘法：$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$，与今相同。

这是世界上最早的分数运算法则。分数算法大约在 15 世纪才在欧洲流行，认为这种算法源于印度。实际上印度 7 世纪婆罗门笈多才有分数运算法则，且都与中国相同。中国古算经中有若干分数应用题。如《孙子算经》、《张丘建算经》都有“河上荡杯”问：一妇女在河边洗杯盘，有人问她杯盘为什么这么多？她答道：家中有客人，不知其数。只知道 2 人合用一个菜盘，3 人合用一个汤杯，4 人合用一个饭碗，共用杯盘 65 个。问客人是多少？其算法是：$65\div\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)=65\div\frac{13}{12}=60$（人）。

在数学史上，小数的产生比分数晚得多。刘徽在开方不尽时用十进分数（微数）逼近无理根的近似值，开十进小数之先河。古代用分、厘、毫、丝、秒、忽表示分以下的奇零部分。赝本《夏侯阳算经》常常以某个整单位表示，不再列出微数单位，如将绢 1525 匹 3 丈 7 尺 5 寸化为 1525 匹 9375（1 匹＝4 丈），实际上是一个十进小数。秦九韶、李冶都将 1863.2 寸表示成 $\underset{\text{寸}}{1\,8\,6\,3\,2}$，与今之记法基本相同。杨辉、朱世杰先后总结了民间

化斤两为十进小数的歌诀。中国是世界上最先使用小数的国家。中亚的阿尔·卡西13世纪才掌握十进分数。西方斯台汶1585年才有十进小数概念，记法远不如唐宋时的中国，如上述小数记成 ⓪①②③④ 1 5 2 5 9 3 7 5 或 1 5 2 5 ⓪ 9 ① 3 ② 7 ③ 5 ④。

3 比例与比例分配

比例问题早在先秦已见端倪。《九章》粟米章的今有术是完整的比例算法：已知所有数，所有率和所求率，则所求数为

$$所求数=所有数\times所求率\div所有率。$$

这种方法传到印度和西方后叫三率法(rule of three)。刘徽认为，今有术是一种普遍方法。凡是九数中的问题，只要能找出其中的率关系，通过齐同变换，无不归于此术。如《九章》均输章的题目：一客人离开旅馆时忘记带衣服，过了$\frac{1}{3}$天，主人发现了，骑马追上客人还给他衣服，回家时天已$\frac{3}{4}$。客人的马一日行300里，问主人的马一日行多少？刘徽认为，$\frac{3}{4}-\frac{1}{3}=\frac{5}{12}$是主人追客来回用日率，$\frac{5}{24}$是主人追客用日率，$\frac{5}{24}+\frac{1}{3}$

$=\frac{13}{24}$是客人被追上前用日率。而主人用日率即客人马行率，客人用日率即主人马行率，因此客马行率5，为所有率，主马行率13，为所求率，300里为所有数。主人马一日行$=300$里$\times 13\div 5=780$里。

比例分配方法古代叫衰分术，各部分的比例叫列衰。《九章》提出的方法是：设所分的数是A，列衰为a_1、a_2、…、a_n，列衰之和为法，某一列衰$a_i(i=1,2,\cdots n)$乘所分的数A为实，实如法而一，便是某一部分$A_i=Aa_i\div(a_1+a_2+\cdots+a_n)$。刘徽认为它可以归结为今有术：所分的数$A$为所有数，列衰之和为所有率，列衰各为所求率，某一部分为所求数。如《九章》衰分章一题目：牛、马、羊吃了人家的青苗，苗主要求赔偿5斗谷子。羊主说：我的羊只吃了马的一半；马主说：我的马只吃了牛的一半。问各赔偿多少？依衰分术，列衰是4、2、1，那么

羊：50升$\times 1\div(4+2+1)=7\frac{1}{7}$升，

马：50升$\times 2\div(4+2+1)=14\frac{2}{7}$升，

牛：50升$\times 4\div(4+2+1)=28\frac{4}{7}$升。

若各部分按$\frac{1}{a_1}$、$\frac{1}{a_2}$、…、$\frac{1}{a_n}$的比例分配，《九章》称为返衰术，其公式是：$A_i = Aa_1a_2\cdots a_{i-1}a_{i+1}\cdots a_n \div (a_2a_3\cdots a_n + a_1a_3\cdots a_n + \cdots + a_1a_2\cdots a_{n-1})$。刘徽说这是“动者为不动者衰”。（《九章算术·衰分章注》）

政府要征收赋税，赋税有的缴粮食，有的是徭役。各县户口不等，距离有远近，粮价有差异，如何分配才能使各户的负担公平合理呢？这就是均输问题，也是一种比例分配问题。只是各县的分配比例未预先给定，而是要根据各县条件计算出来。设 n 县共应缴谷物 A 斛，各县户数分别为 p_1、p_2、…p_n，距离为 q_1、q_2、…q_n，每斗谷物价 r_1、r_2、…r_n，一车载 m 斛，工价一里 k 钱，则 i 县运一斛的费用$\frac{kq_i}{m}+r_i$，则$\frac{p_i}{\frac{kq_i}{m}+r_i}$为 i 县的分配比例。刘徽指出，这可以使$\frac{kq_i}{m}+r_i$ 户共出一斛，则每户均为一钱，负担公平。

4 率与齐同原理

比例和比例分配都要用到率。率的这种意

义至今仍然使用。刘徽拓展了率的意义，提出“凡数相与者谓之率”。成率关系的数量同时扩大或缩小同样的倍数，其率关系不变。比如甲、乙、丙三物有关系：甲∶乙$=a:b_1$，乙∶丙$=b_2:c$，已知甲为A，问化成丙为多少？《九章》两次应用今有术，甲A化成乙$B=\frac{Ab_1}{a}$，乙B化成丙$C=\frac{Bc}{b_2}=\frac{\frac{Ab_1}{a}c}{b_2}=\frac{Ab_1c}{ab_2}$，叫重今有术。刘徽认为，可以先把两个率关系中乙的率变成相同的值b_1b_2，为了保持率关系不变，则甲的率须变成ab_2，丙的率须变成cb_1，称为与乙相齐，即甲∶乙∶丙$=ab_2:b_1b_2:cb_1$，对甲、丙直接应用今有术：$C=\frac{Ab_1c}{ab_2}$。刘徽把这种变换称为齐同原理。它源于分数通分，将$\frac{a}{b}$与$\frac{c}{d}$通分，化成相同分母：bd，然后使两者的分子与分母相齐，分别变成ad、bc，两分数变成$\frac{ad}{bd}$、$\frac{bc}{bd}$，这叫做齐其子，同其母。实际上，刘徽把分子、分母看作一组率的关系，与现代算术教科书关于分数的定义一致。

齐同原理在运算中作用特别大，而齐同方式则是多样的。如《九章》均输章题目：野鸭从南

海飞至北海需 7 天，大雁从北海飞至南海需 9 天，若两者从南、北海同时起飞，问几天相逢？刘徽提出了两种齐同方式：飞一个单程，野鸭 7 天，大雁 9 天。若使两者天数相同，都是 63 天，则野鸭飞 9 个单程，大雁飞 7 个单程，与 63 天相齐。野鸭与大雁同时起飞，则 63 天飞(9+7)个单程，因此$\frac{63}{9+7}$天飞一个单程，即相逢日。齐同原理也可这样应用：一天野鸭飞单程的$\frac{1}{7}$，大雁飞$\frac{1}{9}$。若将一个单程分成 63 份，则野鸭一天飞一个单程的$\frac{9}{63}$，大雁飞$\frac{7}{63}$，一天共飞一个单程的$\frac{9+7}{63}$份，因此共飞一个单程需 $1\div\frac{9+7}{63}=\frac{63}{9+7}$天。两者殊途同归，都证明了《九章》解法的正确性。

率与齐同原理，在其他运算中的应用，后面将陆续谈到。刘徽把它们看成运算的纲纪。

5 筹算乘除捷算法

筹算乘除法三行布算，很不方便。唐中叶之

后适应商业发展的需要，人们着手简化筹算乘除法，一是化三行布算为一行布算，二是化乘除为加减，通常称为乘除捷算法。赝本《夏侯阳算经》中有许多化多位乘法为一位乘法的例子。如某地区共 a 丁，每丁应纳庸调布 2.45 端（一端=5 丈），则共应纳布端数为 $a\times 2.45=a\times 7\times 7\div 10\div 2$，把一个含有三位有效数字的小数乘法化成一位的两次乘，两次除，便可在一行内完成运算。一位乘法称为因，这种方法叫重因法。

化乘除为加减的方法称为身外加减法，是乘（除）数首位为 1 的一种乘除捷算法。赝本《夏侯阳算经》卷下有题：今有绢 2454 匹，每匹值钱 1.7 贯，问值多少钱？其算法是 $2454\times 1.7=2454\times 17\div 10=(24540+2454\times 7)\div 10$，其中 2454×17 的程序是：𝍪𝍣𝍭𝍣→𝍪𝍣𝍭68→𝍪𝍣918→𝍪7718→41718。可见其要领就是在被乘数本身的 10 倍外加上被乘数与乘数其他位之积，故称为身外加法。自然，乘数的两有效数字间有〇时，便用隔位加。身外减法与此相类似。

杨辉在《乘除通变本末》中系统总结了唐宋时期化乘除为加减的方法，提出加法代乘五术，

减法代除四术。对乘(除)数首位不是 1 的乘(除)法，可以用加倍、折半等方法将乘(除)数的首位变成 1，再用加(减)法代乘(除)，这种方法称为“求一”术。杨辉《乘除通变本末》中有“求一代乘除”歌诀。“求一乘”的歌诀是：“五、六、七、八、九，倍之数不走。二、三须当半，遇四两折纽。倍折本从法，实即反其有(自注：倍法必折实，倍实必折法)。用加以代乘，斯数足可守。”例如 $237\times56=(237\div2)\times(56\times2)=118.5\times112$，用加二位完成乘法。14 世纪归除歌诀简化后，这种方法便被淘汰。

归除是在九归与减法基础上发展起来的。归指一位除法，从 1 到 9 的一位除法称为九归。经过杨辉、朱世杰等的总结发展，《算学启蒙》中的九归歌诀与现今珠算口诀形式基本一致：

> 一归如一进，九一进成十。二一添作五，逢二进成十。三一三十一，三二六十二，逢三进成十。四一二十二，四二添作五，四三七十二，逢四进成十。五归添一倍，逢五进成十。六一下加四，六二三十二，六三添作五，六四六十四，六五八十二，逢六进成十。……九归随身下，逢九进成十。

朱世杰已懂得归除，但无细草。何平子《详明算法》有归除细草，如 48895 ÷ 385，为三归八五除，其细草是：列被除数𝍣𝍰𝍧𝍱𝍤，见首位 4，呼逢三进一十，成 1𝍠𝍰𝍧𝍱𝍤，呼一八除八，成1〇ō𝍧𝍱𝍤，呼一五除五，得 1〇ō𝍢𝍱𝍤；见余数首位为 10，呼逢六进二十，成 1 2 𝍬𝍢𝍱𝍤，呼二八除一十六，二五除一十，得 1 2𝍪𝍥𝍱𝍤；余数首位是 2，呼三二六十二，为 1 2 6 𝍧𝍱𝍤，呼逢三进一十，成 1 2 7 𝍤𝍱𝍤，呼八七除五十六，五七除三十五，适尽，得 1 2 7。

后来，人们又创造了撞归口诀，解决大除数如何确定商的问题。至此，筹算捷算法及其歌诀已发展到算筹与筹算无法容纳的地步，便产生了珠算盘和珠算术，筹算口诀变成了珠算口诀，即珠算的算法语言。

6　盈不足术

盈不足问题构成《九章》的第七章。它的典型问题是：今有共买物，人出 a_1，盈 b_1，人出 a_2，不足 b_2，问人数、物价各多少？《九章》的第一种方法是："置所出率，盈、不足各居其下。令维乘

所出率，并以为实，并盈、不足为法，实如法而一”。此即求出实 $a_1b_2+a_2b_1$，法 b_1+b_2，设所求人数为 u，物价为 v，那么

$$\frac{v}{u}=\frac{a_1b_2+a_2b_1}{b_1+b_2} \tag{1}$$

便是每人应出的不盈不亏的数。对共买物的问题，“置所出率，以少减多，余，以约法、实。实为物价，法为人数”，即

$$u=\frac{b_1+b_2}{|a_1-a_2|},$$

$$v=\frac{a_1b_2+a_2b_1}{|a_1-a_2|}.$$

刘徽以齐同原理论证了它的正确性。此是先同盈、不足为 b_1b_2，所出率须与盈、不足相齐，变成 a_1b_2，a_2b_1，问题成为 b_2 次所出 a_1，共盈 b_1b_2，b_1 次所出 a_2，共不足 b_1b_2。因此 b_1+b_2 次共出 $a_1b_2+a_2b_1$，则不盈不亏，每次所出为$\frac{a_1b_2+a_2b_1}{b_1+b_2}$。而 b_1+b_2是众人之差，它是由一人之差 $|a_1-a_2|$ 积累而成的，因此$\frac{b_1+b_2}{|a_1-a_2|}$便是人数，这也证明了《九章》第二种方法的正确性。第二种方法给出公式 $u=\frac{b_1+b_2}{|a_1-a_2|}$，$v=ua_1-b_1=ua_2-b_2$。《九章》还给出了两盈、两不足、盈适足与不足适足类问题的

解法。

任何一个算术问题，假设一个答案，代入原题验算，都必定会出现盈、不足、适足这三种情况之一，两次假设，便成为一个盈不足问题，公式(1)就是为这些问题提出的。以“油自和漆”问为例。已知漆 3 可以换油 4，而油 4 可调和漆 5。现有漆 3 斗，欲拿出一部分换油，使换得的油恰好能调和剩余的漆。问用于换油的漆，换得的油，要调和的漆各多少？其解法是：假令用于换油的漆 9 升，则换得油 12 升，可调和漆 15 升，$30-(9+15)=6$，不足 6 升；假令用于换油的漆 12 升，则换得油 16 升，可调和漆 20 升，$(12+20)-30=2$，有余 2 升。代入(1)式，用于换油的漆是 $\frac{12\times6+9\times2}{2+6}=11\frac{1}{4}$（升），换得油 15 升，调和的漆 $18\frac{3}{4}$ 升。

中国数学发展的早期，对复杂的问题常用这种两次假设的方法化成盈不足问题解决。这种方法对线性问题可以得出准确的答案，而对非线性问题只能得出近似解，这是《九章》的作者没有认识到的。例如：有一堵墙厚 5 尺，两只老鼠对穿，第一天都穿 1 尺，从次日起，大鼠一

天天加倍，小鼠一天天减半，问两鼠何日相逢？《九章》的解法是：假令 2 日，不足 5 寸，假令 3 日，有余 3 尺 $7\frac{1}{2}$寸，代入(1)式，得 $2\frac{2}{17}$日。但此题是非线性的，准确解应为$\frac{\lg(2+\sqrt{6})}{\lg 2}$。然而，即使在高等数学中，对复杂的问题用盈不足术求解也不失为一种有效的方法，如求 $f(x)=0$ 的根的假借法或弦位法，其原理便是盈不足术。

盈不足术传入阿拉伯和西方之后，长期成为他们解决数学难题的主要方法。阿拉伯人把它称为契丹算法，又称作双设法。



面 积 与 体 积

ZHONG GUO
WEN HUA SHI
ZHI SHI
CONG SHU



国古代的几何一般不讨论图形离开数量关系的性质，而要计算出长度、面积、体积。面积、体积问题主要集中在《九章算术》及其刘徽注中，其他算经中也有涉及。

1 多边形面积

长方形在古代叫方田，《九章》提出的面积公式是“广从步数相乘得积步”。古代“广”指东西的长度，“从〔zòng 纵〕”指南北的长度，则面积 $S=ab$。刘徽对这一公式未证明，而是给出了面积定义：“凡广从相乘谓之幂。”幂的涵义与今天指乘方不同。

三角形叫圭田，《九章》提出的面积算法是“半广以乘正从”，广即底，正从即高，公式为 $S=\frac{1}{2}ah$。刘徽记载了以盈补虚的证明方法，将三

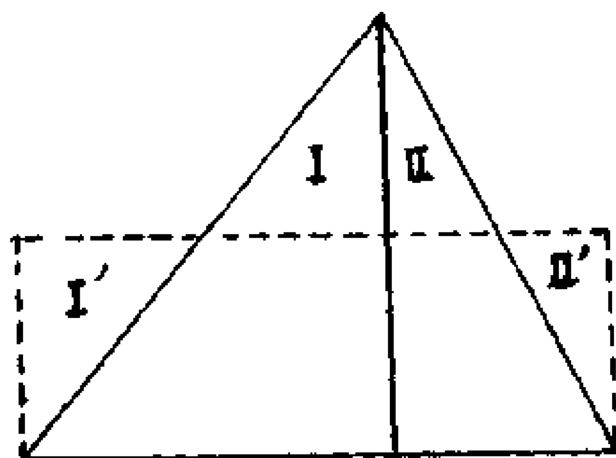


图1　圭田之出入相补

角形拚补成长方形，如图1所示。以盈补虚，又称出入相补，是中国古代解决面积、体积、勾股等问题的主要方法之一。

直角梯形，《九章》称之为邪田，其面积的计算公式是$S=\frac{1}{2}(a_1+a_2)h$，其中a_1、a_2、h是上、下底及高，也是拚补成长方形以证明其面积，如图2所示。一般梯形叫箕田，它可分解成两个邪田，其面积公式同上。

秦九韶的三斜求积术是已知三角形三边求其面积的方法：今有一三角形田，小斜13里，中斜14里，大斜15里，其面积的求法是："以小斜幂并大斜幂，减中斜幂，余半之，自乘于上。以小斜幂乘大斜幂，减上，余，四约之，为实。一为从

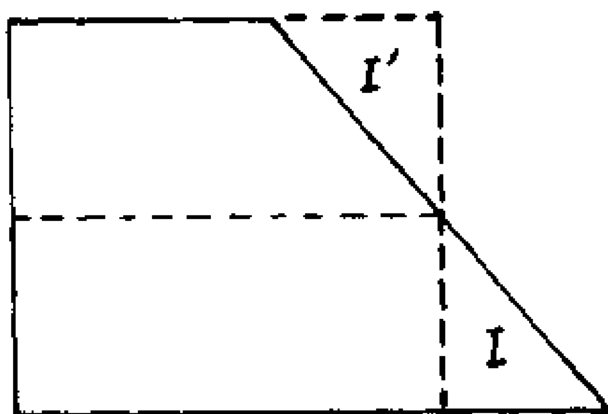


图 2 邪田之出入相补

隅，开平方得积。”（《数书九章》卷五）这段话用现代符号写出便是：

$$S=\sqrt{\frac{1}{4}\left[a^2b^2-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)^2\right]}.$$

根号下的多项式分解因式便成为$\frac{1}{2}(a+b+c)\cdot\frac{1}{2}(a+b-c)\cdot\frac{1}{2}(c+a-b)\cdot\frac{1}{2}(b+c-a)$。可见三斜求积公式与古希腊海伦公式是等价的。秦九韶还用三斜求积术解决了四不等田的面积。

2 圆与曲边形、曲面形的面积

《九章》提出了圆面积的 4 种算法：“半周半

径相乘得积步”，即 $S=\frac{1}{2}lr$；“周径相乘，四而一”，即 $S=\frac{1}{4}ld$；“径自相乘，三之，四而一”，即 $S=\frac{3}{4}d^2$；“周自相乘，十二而一”，即 $S=\frac{1}{12}l^2$。其中 S、l、r、d 分别是圆面积、周长、半径、直径。前两个公式是等价的，并且在理论上是正确的，只是《九章》时代取周三径一之率，实际计算误差较大。后两个公式本身就不准确。刘徽用极限思想证明了第一个公式（见第 11 节），并利用这个公式求出了圆周率 $\pi=\frac{157}{50}$，以此修正了后两个公式。

弓形田古代叫弧田，《九章》给出的公式是 $S=\frac{1}{2}(cv+v^2)$，c 为弦，v 为矢。刘徽认为此公式不准确，提出了用一串三角形逼近弧田的方法。

圆环形的田叫环田，《九章》提出的算法是：面积 $S=\frac{1}{2}(L_1+L_2)d$，其中 L_1、L_2 为中、外周长，d 为中外周的距离。刘徽提出了新的公式 $S=\frac{1}{2}(L_2r_2-L_1r_1)$。

刘徽在证明《九章》宛田（指球冠形的田地）面积公式不准确时，提出了圆锥侧面积公式：$S=\frac{1}{2}Ll$，或 $S=\frac{\pi}{2}dl$，L 为下周长，l 为母线长，d

为下周径。

3 多面体体积

《九章》商功章提出了许多多面体体积的算法，并在实际中使用了长方体的体积公式 $V=abh$，对此，刘徽把它看成不言自明而未试图证明。

堤、沟、渠是水利设施，堑、城、垣是建筑或防御工事，其横截面都是相等的梯形。设上、下广是 a、b，高（深）h，长 l，《九章》提出的体积公式是 $V=\frac{1}{2}(a+b)hl$。刘徽采用出入相补，将其

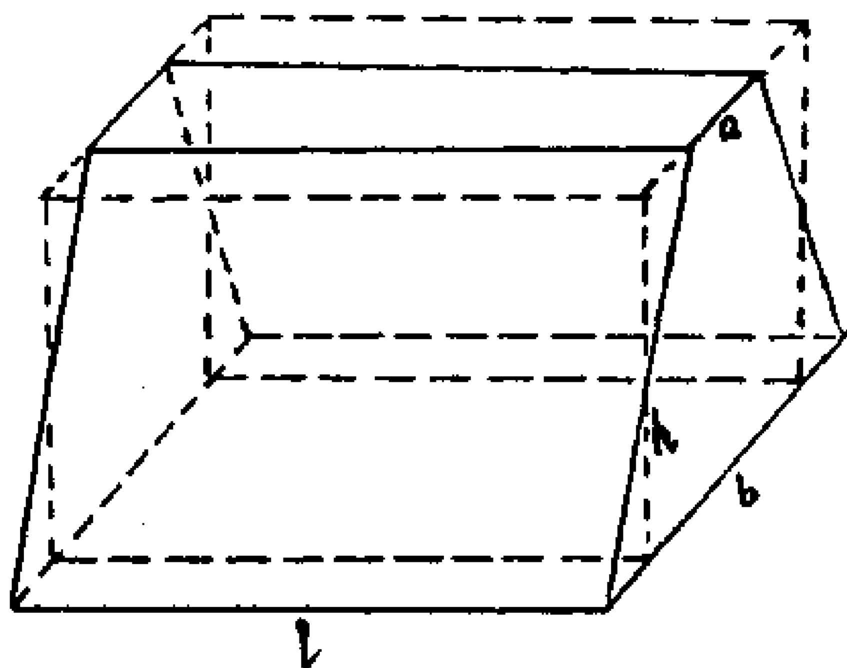


图 3 堑之出入相补

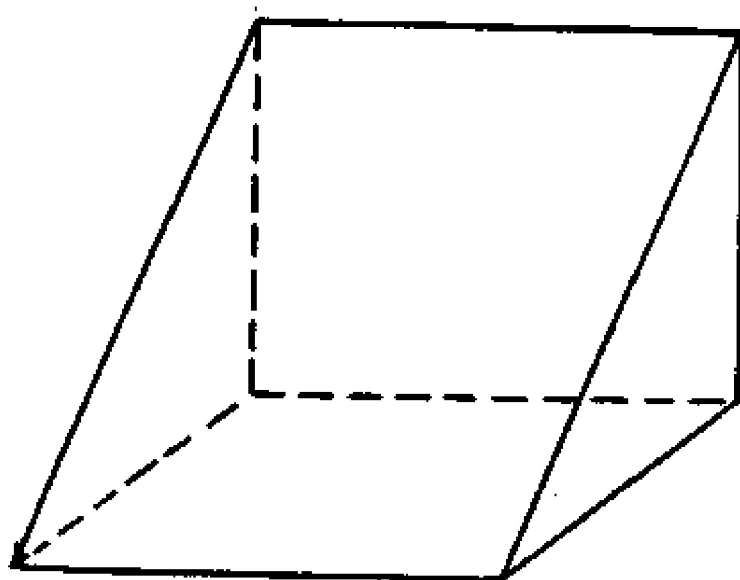


图 4 堑堵

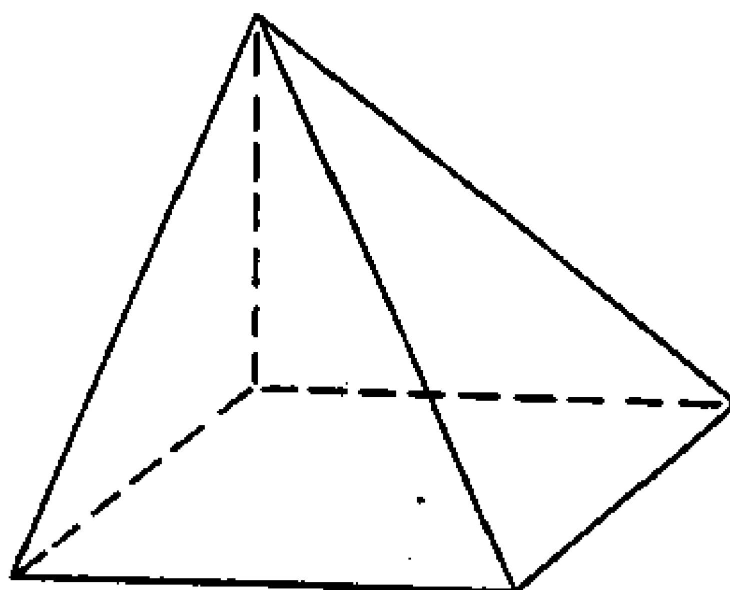


图 5 阳马

变成宽$\frac{1}{2}(a+b)$，长 l，高 h 的长方体证明之（图3）。

堑堵是将长方体沿相对两棱剖开所得的立

体(图 4),其体积显然为 $V=\frac{1}{2}abh$。沿堑堵的一顶点与相对的棱剖开,一部分是底面为长方形,一棱垂直于底面的四棱锥,称为阳马(图 5),《九章》给出其体积公式 $V=\frac{1}{3}abh$;一部分为四

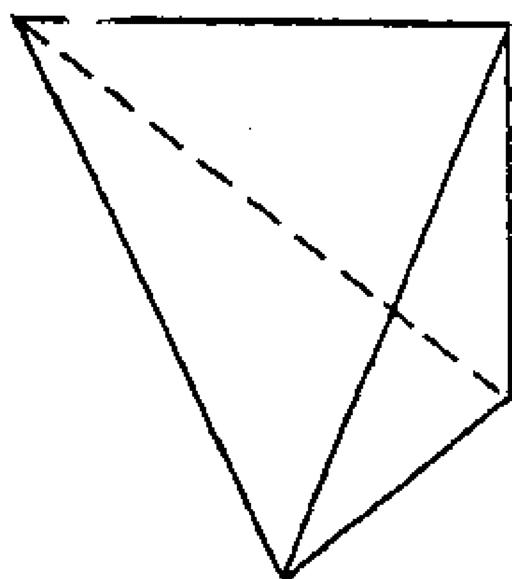


图 6 鳖臑

面都是勾股形的四面体,叫鳖臑〔nào 闹〕(图 6),其体积 $V=\frac{1}{6}abh$。在 $a=b=h$ 的情况下,人们用六个鳖臑或三个阳马可拼成一个正方体,上述两个公式是显然的,这是棊[①]〔同"棋"〕验法。而当 $a\neq b\neq h$ 时,棊验法无能为力,必须用无穷小分割方法才能证明上述公式。这是刘徽

① "棊"是特制的立体模型。

的重大贡献，将在第十一节中介绍。

方锥的体积与阳马相同（见图 7）。今之方台，古代称为方亭。设上方边长 a，下方边长 b，高 h（图 8），《九章》给出的公式是 $V=\frac{1}{3}(a^2+b^2+ab)h$。刘徽又给出等价的公式 $V=\frac{1}{3}(b-a)^2h+abh$。刍童是草垛，盘池是挖的水池，冥谷是挖的大墓穴，都是上、下底面为长方形的棱台体（图 9）。汉代帝王的陵墓都是刍童形。设上

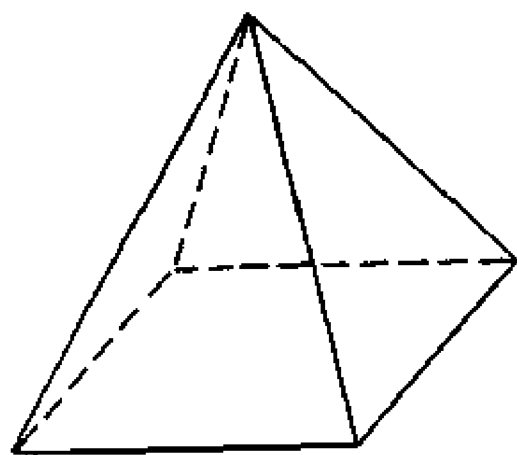


图 7 方锥

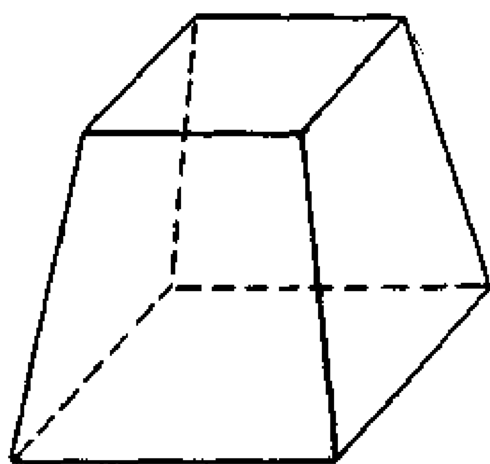


图 8 方亭

底为 $a_1\times b_1$，下底为 $a_2\times b_2$，高 h，《九章》给出的体积公式是 $V=\frac{1}{6}[(2a_1+a_2)b_1+(2a_2+a_1)b_2]h$。刘徽又提出两个等价的公式 $V=\frac{1}{3}(a_2-a_1)(b_2-b_1)h+\frac{1}{2}(a_2b_1+a_1b_2)h$ 和 $V=\frac{1}{3}[a_1b_1+a_2b_2$

$+\frac{1}{2}(a_2b_1+a_1b_2)]h$。刍甍也是草垛，形状像屋脊

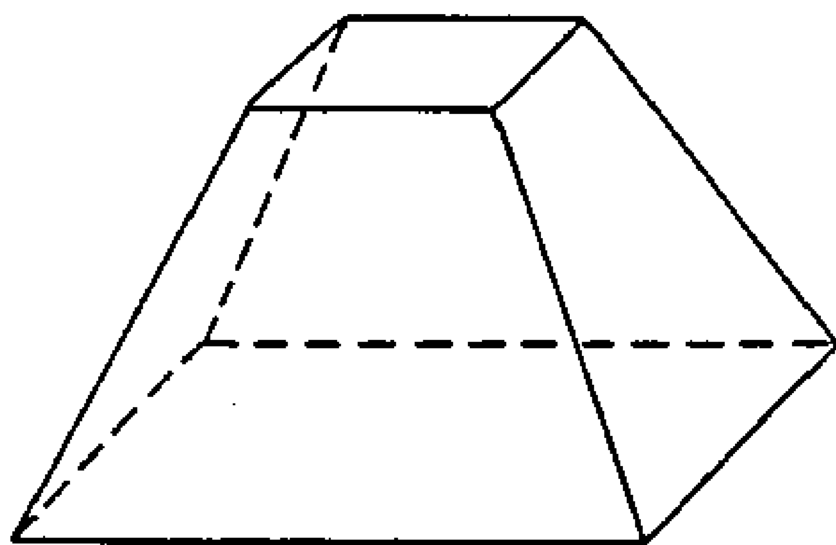


图 9 刍童

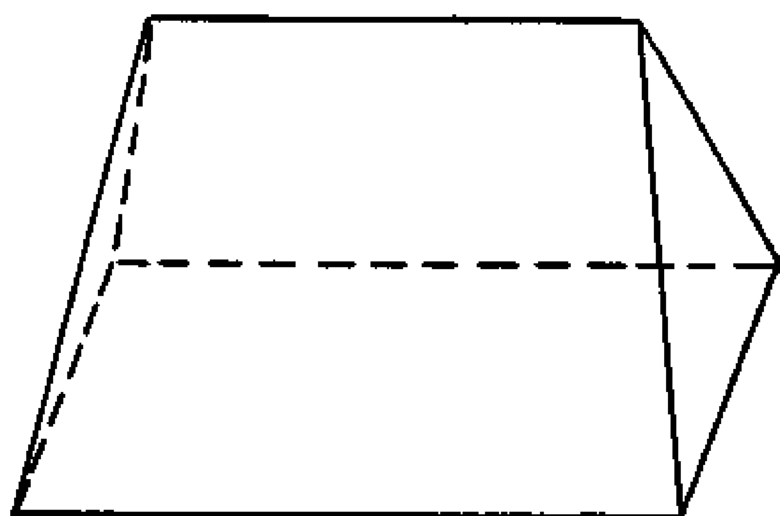


图 10 刍甍

（图 10）。设底面为 $a_2\times b_2$，上长 b_1，高 h，《九章》给出其体积公式 $V=\frac{1}{6}(2b_2+b_1)a_2h$。刘徽又给

出等价的公式 $V=\frac{1}{3}(b_2-b_1)a_2h+\frac{1}{2}b_1a_2h$。羡〔音 yán，通埏〕除是墓道，它是一种三面为等腰梯形（其中两面互相垂直）而两侧面为三角形的楔形体（图 11）。设其三广为 a、b、c，高 h，长 l。

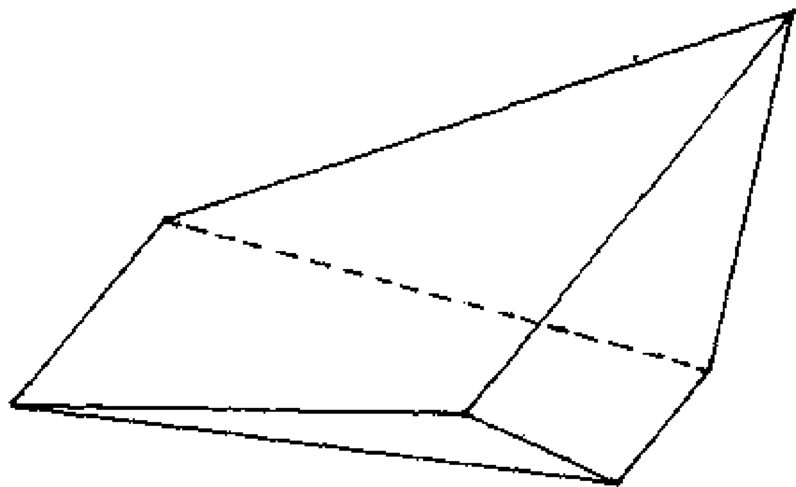


图 11 羡除

《九章》给出其体积公式是 $V=\frac{1}{6}(a+b+c)hl$。对这些立体的特殊情形，刘徽之前都用棊验法，而对一般情形，棊验法亦无能为力。刘徽将它们分解成有限个长方体、堑堵、阳马、鳖臑，求其和而证明之。刘徽所补充的上述公式就是由此得出的。

显然，复杂多面体体积的解决都要归结到阳马、鳖臑，正如刘徽所说："不有鳖臑，无以审阳马之数，不有阳马，无以知锥亭之类，功实之

主也。"(《九章算术·商功章注》)中国古代的多面体体积理论，由《九章》提出公式，刘徽完成证明，可以说基本完备。祖冲之父子可能将其推进

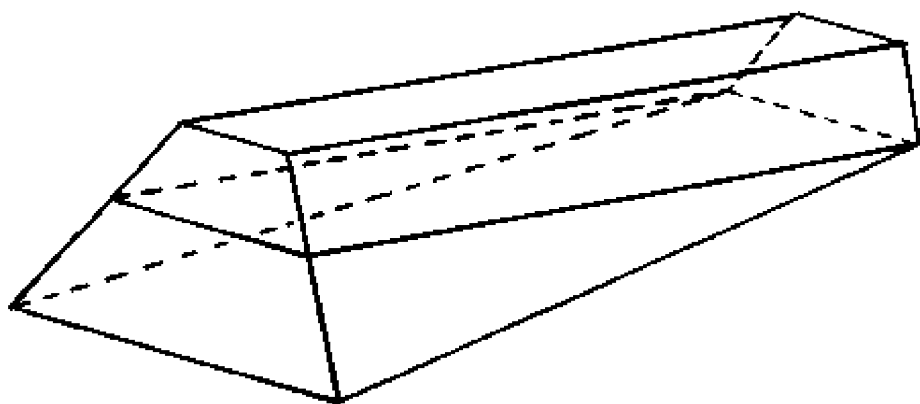


图 12 堤防

到隋唐数学家看不懂的地步，由于《缀术》失传，其详情不得而知。就现有资料看唐宋无大的突破。唐初王孝通解决土木工程中更复杂的体积计算问题，都是《九章》已经讨论过的多面体或其组合。《九章》的堤上下两底平行，王孝通解决了一种上下底不平行的堤防，如图 12，它可以分解成一个堤与一个羡除，那么，其体积就是两者体积之和。金元治河著作《河防通议》给出其

体积公式 $V=\frac{1}{6}[(2h_1+h_2)\frac{a+b_1}{2}+(2h_2+h_1)\frac{a+b_2}{2}]l$，其中 a 为上底面广，l 为长，h_1、h_2 分别为两头之高，b_1、b_2 分别为两头下广。

4　圆体体积

这里的圆体主要指圆柱、圆锥、圆台、球等有关的立体。《九章》称圆柱体为圆堢壔〔bǎo dǎo 堡倒〕，或圆囷，称圆台为圆亭。《九章》提出：圆柱体的体积公式为 $V=\frac{1}{12}L^2h$，圆锥体的体积公式 $V=\frac{1}{36}L^2h$，圆台的体积公式 $V=\frac{1}{36}(L_1L_2+L_1^2+L_2^2)h$，其中 L 为下周，L_1、L_2 为上、下周，h 是高。显然，这些公式都对应于圆面积公式 $S=\frac{1}{12}L^2$，因而是不准确的。刘徽用圆周率 $\frac{157}{50}$ 将其系数 $\frac{1}{12}$ 修正成 $\frac{25}{314}$。

球在《九章》中称作立圆，刘徽称之为丸。《九章》没有明确给出球体积公式，但少广章开立圆术由球体积 V 求直径 d 的公式是 $d=\sqrt[3]{\frac{16V}{9}}$，说明 $V=\frac{9}{16}d^3$。刘徽指出此公式不正

确。他设计了牟合方盖，而祖暅之彻底解决了这个问题。

曲池是一种平剖面为一段圆环的立体，形

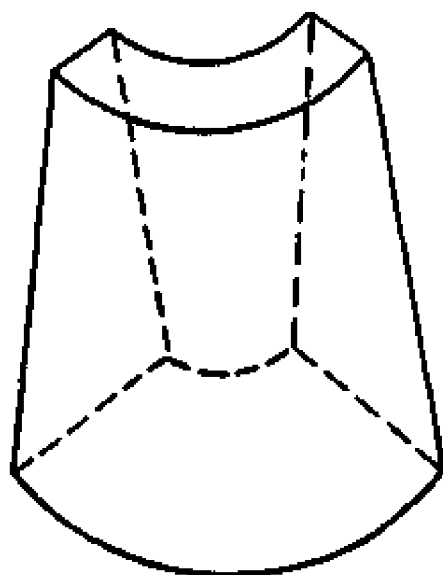


图 13 曲池

状如图 13 所示。《九章》将它归于刍童类，不过公式中的上长 b_1 代之以 $\frac{1}{2}(L_1+L_2)$，下长 b_2 代之为 $\frac{1}{2}(l_1+l_2)$，此 L_1、L_2 为曲池上底的中周、外周，l_1、l_2 为下底的中周、外周，因此其公式应为

$$V=\frac{1}{6}\left[(2a_1+a_2)\frac{L_1+L_2}{2}+(2a_2+a_1)\frac{l_1+l_2}{2}\right]h。$$



勾股测望

ZHONG GUO
WEN HUA SHI
ZHI SHI
CONG SHU

相传大禹治水时左手拿着准绳，右手拿着规矩。准绳、规矩都是测望山川高低远近的工具。人们对勾股定理的认识也很早，不过勾股知识的大发展是在西汉，而三国赵爽、刘徽方建立起理论基础。

1 勾股定理

勾股定理在《九章》中的表述是："勾股术曰：勾股各自乘，并，而开方除之，即弦。"即 $c=\sqrt{a^2+b^2}$，又有 $a=\sqrt{c^2-b^2}$、$b=\sqrt{c^2-a^2}$ 两种形式。刘徽只作了证明提示："勾自乘为朱方，股自乘为青方，令出入相补，各从其类，因就其余不移动也。合成弦方之幂，开方除之，即弦也。"这段文字过于简括，后人推测很多，图 14 是常见的一种出入相补方式。

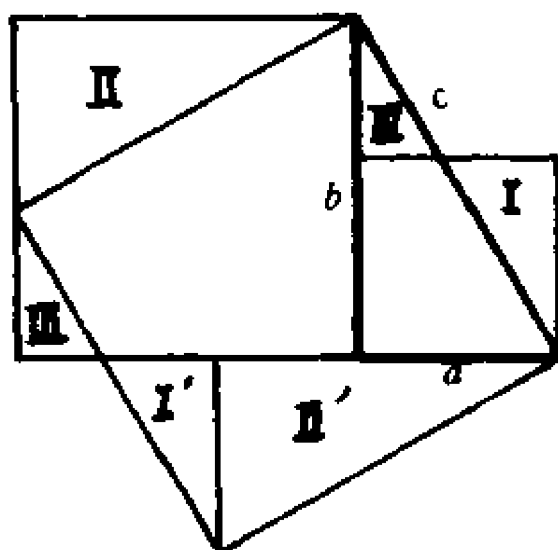


图 14　勾股定理的证明

2　解勾股形

《九章》勾股章提出了若干已知勾股形三边中二者的和差等因素，求其边长的例题。赵爽、刘徽、贾宪先后作了进一步的发展，提出了一般性的公式及其证明。

国内外流行的印度莲花问题实际上是《九章》“引葭赴岸”题的改写。此题是：有一水池，方1丈，一株葭〔jiā 佳，初生的芦苇〕生在中央，高出水面1尺，引葭赴岸，恰恰与岸边相齐。问水深、葭长各多少？如图15，刘徽指出，水池边长的一半为勾a，水深为股b，葭长为弦c，葭高于

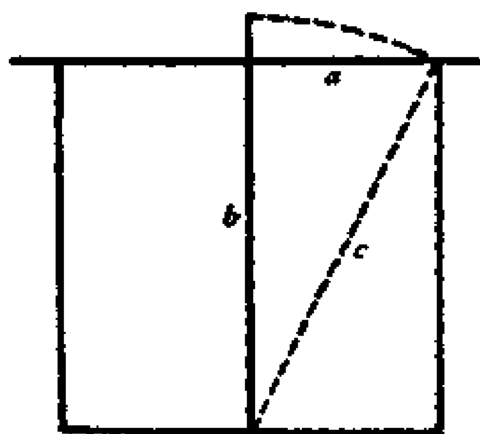


图 15 引葭赴岸

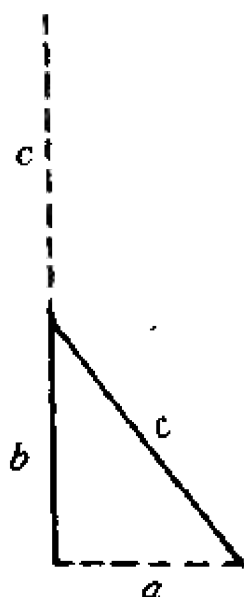


图 16 竹高折地

水面者是弦股差 $c-b$，这是已知勾与弦股差，求股、弦的问题：

$$b=\frac{a^2-(c-b)^2}{2(c-b)},$$

$$c=(c-b)+b.$$

1989 年语文高考试卷有一古文今译题便采自《九章》勾股章“竹高折地”问：今有一株竹高 1 丈，被折断，末梢抵地，抵地处距竹根 3 尺，问剩余高多少？如图 16，刘徽指出，抵地处至竹根距离是勾 a，剩余的高是股 b，折断部分是弦 c，则竹高就是股弦和 $c+b$，此是已知勾与股弦和，求股的问题：

$$b=\frac{(c+b)^2-a^2}{2(c+b)}.$$

这两类题目互相返覆，刘徽以出入相补原理证明之。

有一门户，高比宽多6尺8寸，两角相距1丈。问此门户高、宽各多少？刘徽认为，将户宽作为勾a，高为股b，两角相距为弦c，那么这是一个已知弦c与股勾差$b-a$，求勾、股的问题。《九章》的解法经刘徽改写成

$$a=\frac{1}{2}\sqrt{2c^2-(b-a)^2}-\frac{1}{2}(b-a),$$

$$b=\frac{1}{2}\sqrt{2c^2-(b-a)^2}+\frac{1}{2}(b-a).$$

刘徽的出入相补证明方法是：以勾股和$b+a$为边长作正方形，称为大方，面积$(a+b)^2$；在其内部作一中方，其顶点在大方每边a、b的分点上，其边长自然为c，面积c^2；在中方内部作四个以a、b、c为边长的勾股形，每一个面积为$\frac{1}{2}ab$，称为朱幂。中方除去四个勾股形，余一个以$b-a$为边长的正方形，称为黄方，面积为$(b-a)^2$，如图17，大方有八个朱幂，一个黄幂，中方有四个朱幂，一个黄幂，因此，中方减去半个黄幂等于半个大方：$\frac{1}{2}(b+a)^2=c^2-\frac{1}{2}(b-a)^2$，$\frac{1}{4}(b$

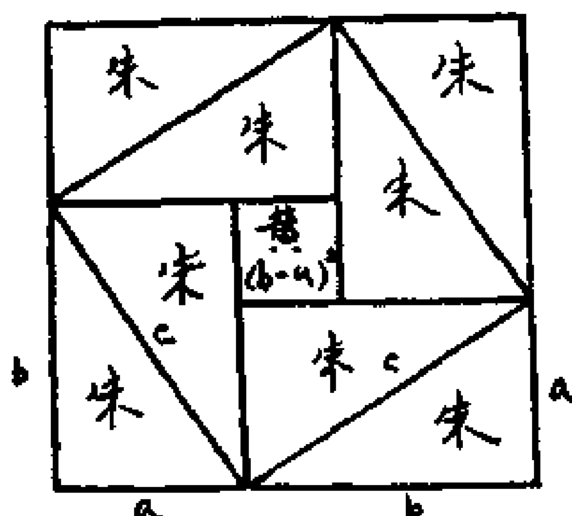


图 17　已知弦与股勾差求勾股的证明

$+a)^2=\frac{1}{2}[c^2-\frac{1}{2}(b-a)^2]$，于是 $\frac{1}{2}(b+a)$

$=\sqrt{\frac{1}{2}[c^2-\frac{1}{2}(b-a)^2]}=\frac{1}{2}\sqrt{2c^2-(b-a)^2}$，而由 $a=\frac{1}{2}(b+a)-\frac{1}{2}(b-a)$，$b=\frac{1}{2}(b+a)+\frac{1}{2}(b-a)$ 证明了上述公式。

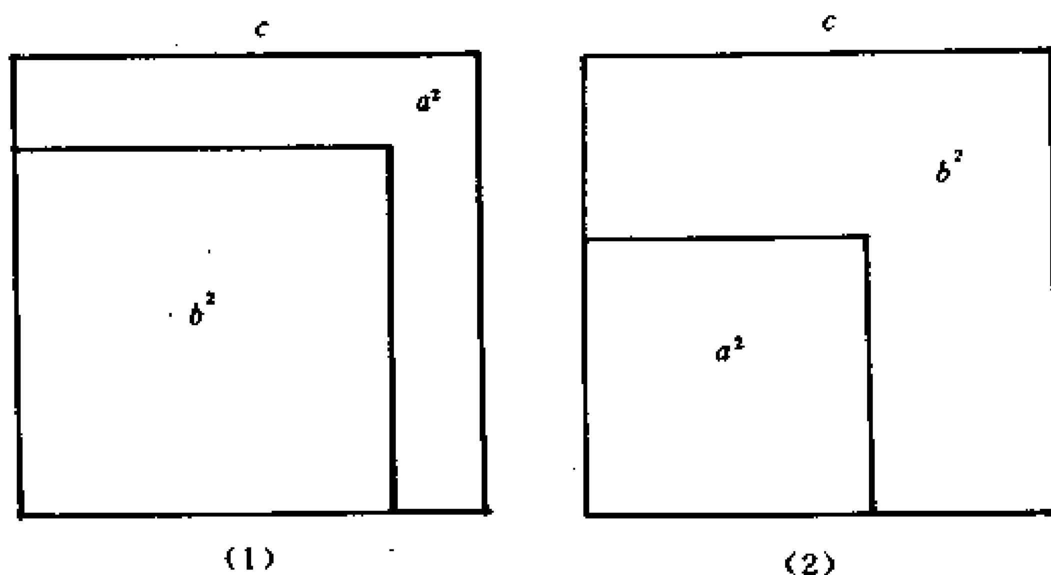
有一门户不知高、宽，有人持一竹竿，不知长短，横着出门，长了 4 尺，竖着出门，长了 2 尺，斜着恰好能出门。问门的高、宽、斜各多少？刘徽把门户的高、宽、斜分别作为勾、股、弦，此题是已知弦勾差 $c-a$、弦股差 $c-b$，求勾、股、弦的问题。《九章》给出的公式是：

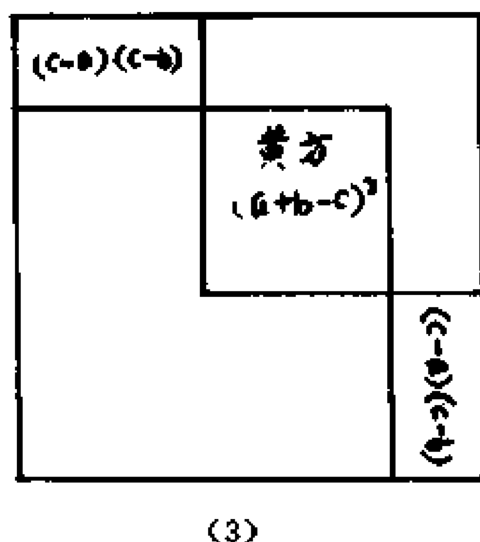
$$a=\sqrt{2(c-a)(c-b)}+(c-b),$$

$$b=\sqrt{2(c-a)(c-b)}+(c-a),$$

$$c=\sqrt{2(c-a)(c-b)}+(c-b)$$

$$+(c-a).$$





(3)

图 18　已知弦勾差弦股差求勾股弦的证明

为了证明这些公式，刘徽首先指出了在弦幂中勾幂与股幂的相互位置，或矩于表，或方于里：

若股幂为方形，则勾幂作为勾矩居于股方之表，如图 18(1)；反之亦然，如图 18(2)。刘徽将其中一个图形旋转 180°，与另一个重合，则成为图 18(3)的情形。勾矩 c^2-b^2 与股矩 c^2-a^2 的面积之和应为弦幂 c^2。在图中，这两者在两角重合于两个以 $c-b$ 为宽、$c-a$ 为长的长方形，其面积为 $2(c-a)(c-b)$。而弦幂中却有一个以 $a+b-c$ 为边长的小黄方未被勾矩与股矩填满。显然，小黄方的面积 $(a+b-c)^2$ 应等于 $2(c-a)(c-b)$，开方

$$a+b-c=\sqrt{2(c-a)(c-b)}.$$

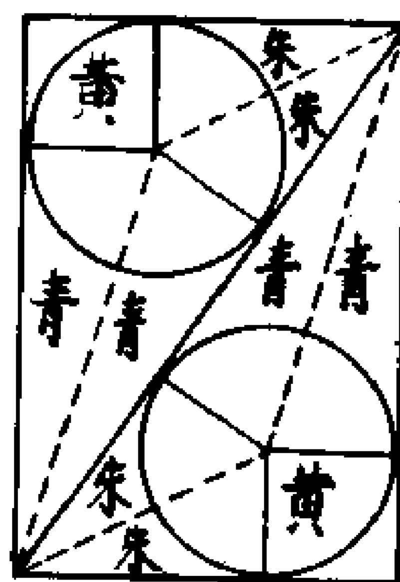
由
$$a=(a+b-c)+(c-b),$$
$$b=(a+b-c)+(c-a),$$
$$c=(a+b-c)+(c-b)+(c-a)$$
便证明了上述三式。

北宋贾宪把《九章》解勾股形的四个类型的方法抽象成一般性公式。杨辉又进而总结出 a、b、c、$c\pm a$、$c\pm b$、$b\pm a$、$a+b\pm c$、$c\pm(b-a)$ 13 种关系及变成 $b-a$、$c-b$、$a+b-c$ 的段数，称作"勾股生变十三名图"。这 13 种关系包括了勾股形中勾、股、弦及其和、差的全部可能的关系，对勾股理论起着提纲挈领的作用。

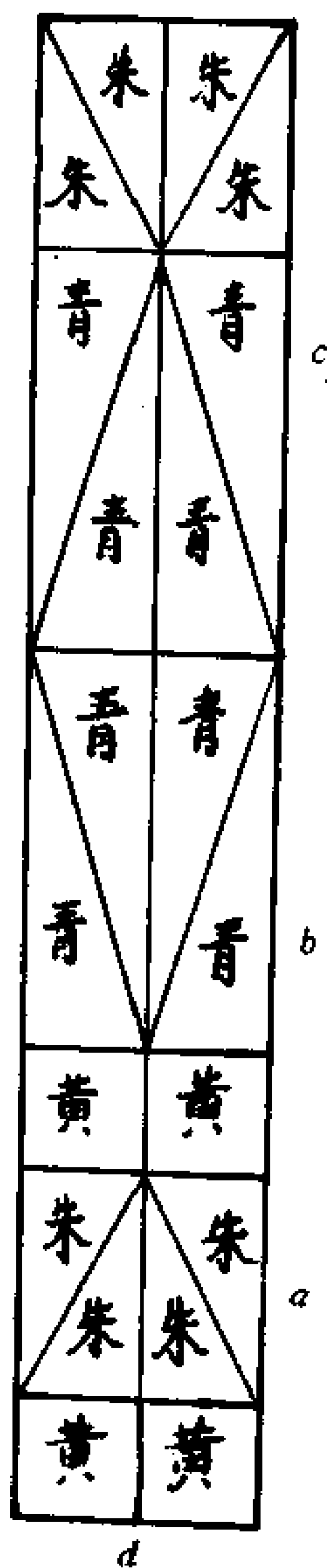
3　勾股容方与容圆

勾股容方与容圆是《九章》勾股章的两个题目。前者是：已知勾股形勾 5 步，股 12 步，问所容正方形边长多少？《九章》的公式是 $d=\frac{ab}{a+b}$。后者是：已知勾股形勾 8 步，股 15 步，问其中容圆之径多少？《九章》的公式是 $d=\frac{2ab}{a+b+c}$。对这两个问题，刘徽都提出了两种方法证明之。以容圆为例。将勾股形从圆心分成朱、青、黄各部分，如图 19(1)，将四个这样的勾股形拼成以 d 为宽，以 $a+b+c$ 为长的长方形，如图 19(2)，其面积为 $2ab$，因此 $d=\frac{2ab}{a+b+c}$。这是出入相补的方法。另一种方法是过圆心作一中弦平行于弦，中弦与勾、股及垂直于勾、股的半径形成两个小勾股形，如图 19(3)。考虑其中一个，比如股上的小勾股形，设三边为 a_1、b_1、c_1，显然 $a_1+b_1+c_1=b$，而 $a_1:b_1:c_1=a:b:c$，因此可用衰分术：$a_1=\frac{ab}{a+b+c}$。而 $d=2a_1=\frac{2ab}{a+b+c}$。刘徽还提出 $d=\sqrt{2(c-a)(c-b)}$ 等公式。

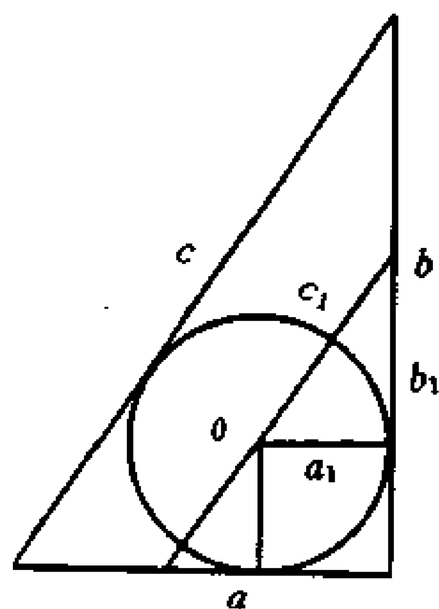
勾股容圆在宋元时代成为重要的研究课



(1)



(2)



(3)

图 19　勾股容圆

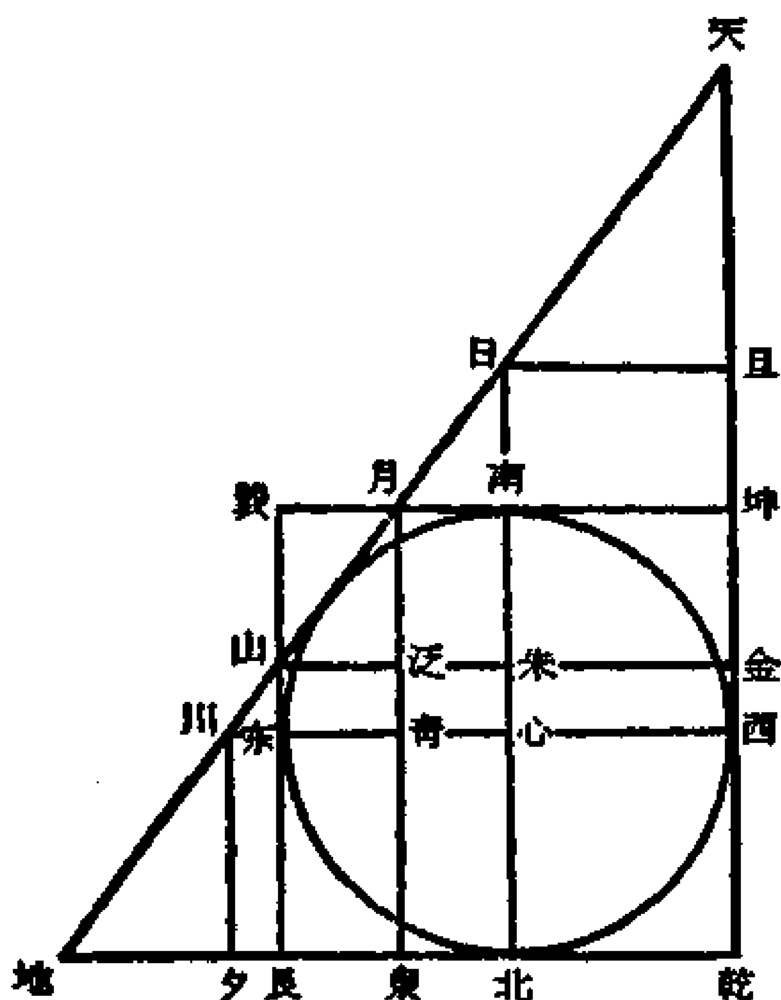


图 20　圆城图式

题。人们考虑了各种容圆问题。元李冶便在洞渊九容基础上演绎出《测圆海镜》，除《九章》的容圆外，还有（见图 20）：圆心在勾上且切于股、弦，称为勾上容圆，其直径 $d=\frac{2ab}{b+c}$，同样，股上容圆 $d=\frac{2ab}{a+c}$，弦上容圆 $d=\frac{2ab}{a+b}$；圆心在勾股交点切于弦，叫勾股上容圆，$d=\frac{2ab}{c}$；切于勾及

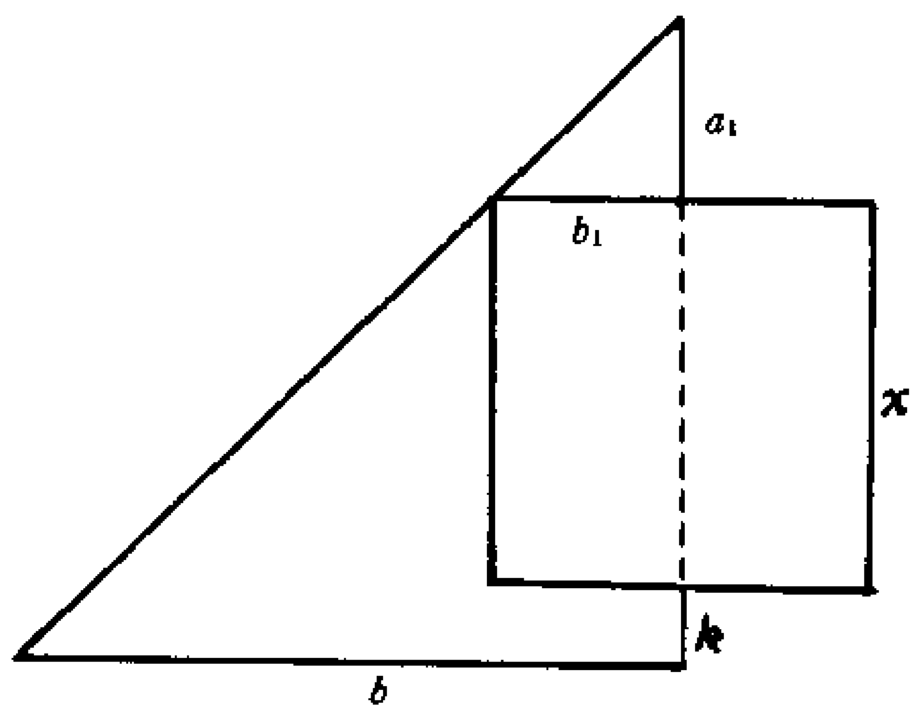
股、弦的延长线者称为勾外容圆 $d=\frac{2ab}{b+c-a}$，同样，股外容圆 $d=\frac{2ab}{a+c-b}$，弦外容圆 $d=\frac{2ab}{a+b-c}$；圆心在股的延长线且切于勾、弦的延长线叫勾外容半圆，$d=\frac{2ab}{c-a}$，同样，股外容半圆 $d=\frac{2ab}{c-b}$。以上共 10 种容圆关系，"洞渊九容"指哪 9 种，清代以来诸说不一。清李善兰又补充了勾弦上容圆 $d=\frac{2ab}{b}$，股弦上容圆 $d=\frac{2ab}{a}$，弦外容半圆 $d=\frac{2ab}{b-a}$。这 13 种容圆直径的分母恰恰对应于杨辉的勾股生变 13 名图的各种关系，分子都是 $2ab$。

4 旁要

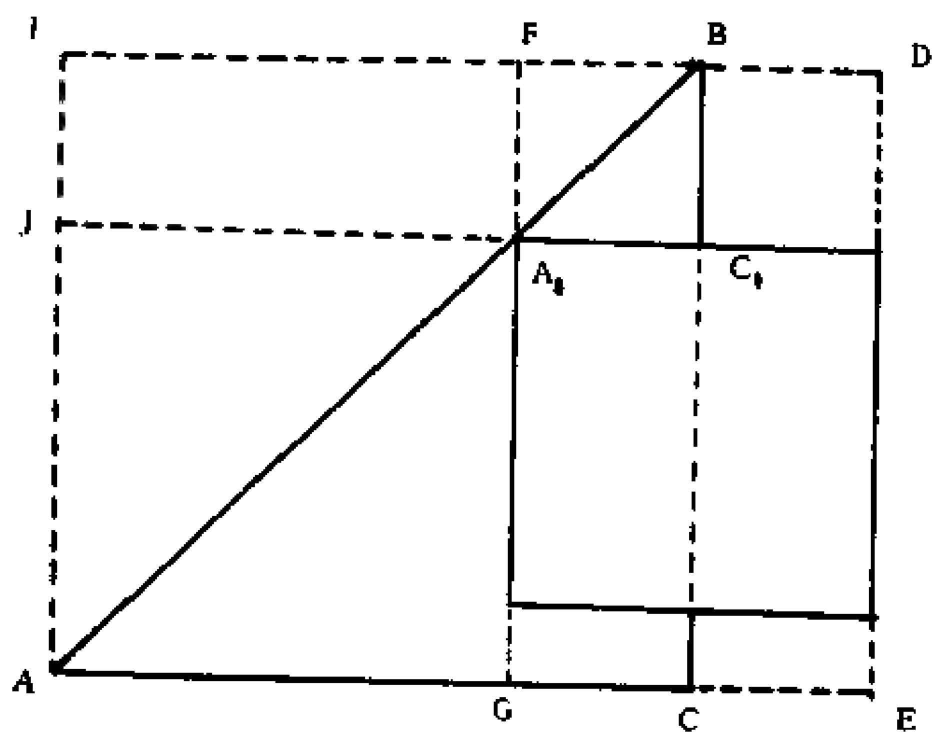
旁要是先秦"九数"之一，西汉张苍、耿寿昌补充了解勾股形等内容后改称勾股，成为《九章》勾股章。根据贾宪、杨辉的提示，上述勾股容方、容圆及八个测望问题是旁要的内容。现在介绍这类测望问题。有一正方形城邑，不知大小，城门都在城墙正中。出北门 20 步有一株树。出

南门 14 步拐向正西 1775 步，恰能看到此树。问城邑每边长多少？设城邑边长 x，出北门 a_1，出南门 k，折西 b，如图 21(1)，考虑两个相似勾股形，小勾股形股 $b_1=\frac{x}{2}$，大勾股形勾 $a=a_1+x+k$。由于$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a}{b}$，或$\frac{a_1}{\frac{1}{2}x}=\frac{a_1+x+k}{b}$，故 $x^2+(a_1+k)x=2a_1b$。这是刘徽推导此公式的第一种方法。第二种方法是：如图 21(2)，宽为 $DF=x$，长为 $BC=x+a_1+k$的长方形 $DEGF$，其面积 $x(x+a_1+k)$，再考虑宽 $BC=x+a_1+k$，长为 $AC=b$ 的长方形 $BCAI$，它被对角线平分，由于勾股形 AA_1J 与 AA_1G 相等，故 BC_1JI 与 $BCGF$ 面积相等。$DEGF$ 的面积是 $BCGF$ 的两倍，即 BC_1JI 的两倍，BC_1JI 的面积为 a_1b，故 $x(x+a_1+k)=2a_1b$。

第二种方法的关键是长方形 BC_1JI 与 $BCGF$ 面积相等，它们有公共部分 BC_1A_1F，则长方形 FA_1JI 与 C_1CGA_1 面积相等。这是一个重要原理，后来贾宪、杨辉将其概括为：将一长方形斜解为二勾股形，两勾股形所容的以公共弦上任一点为公共点的两长方形的面积相等，



（1）



（2）

图 21 出邑南北门

见图 22。这一原理在测望问题的出入相补中作用特别大。《九章》立四表望远、因木望山及测井径问题，都可以这样解决。如因木望山问是：有一树高 9 丈 5 尺，距山 53 里，人目高 7 尺。距树

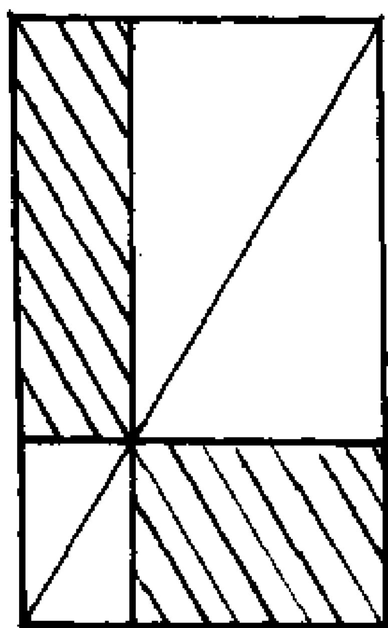


图 22　容横容直原理

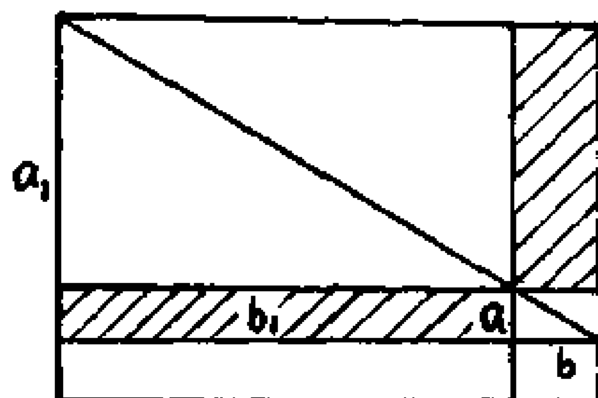


图 23　因木望山

3 里处望山，人目、树顶、山顶成一直线。问山高多少？如图 23。由上述原理，阴影部分相等，故 $ab_1=a_1b$，故 $a_1=\frac{ab_1}{b}$。

5　重差

重差方法是从测太阳高远发展起来的。西

汉刘安《淮南子》便有这种方法的雏形。刘徽认为《九章》的测望对象都是端旁互见的没有超邈如太阳之类。他发展完善了重差术，在《九章算术注序》中指出“凡望极高，测绝深而兼知其远者必用重差、勾股，则必以重差为率”。概括出测日高、远的公式：在洛阳的平地南北方向上立两根表，高 8 尺。同一天中午测量两表的影子，“以景〔yǐng，同影〕差为法，表高乘表间为实，实如法而一。所得加表高，即日去地也。以南表之景乘表间为实，实如法而一，即为从南表至南戴日下也”。此即

$$日高=\frac{表高\times表间}{景差}+表高,$$

$$表至戴日下=\frac{南表景\times表间}{景差}.$$

其中$\frac{表间}{景差}$是两个差之比，故称为重差术，如图 24。戴日下即太阳直射大地之点。这两个公式基于天圆地方、大地为平面的盖天说，不符合实际，但在数学理论上是正确的。《海岛算经》第一问为测望一海岛的高远，其方法、公式与上述日高术完全相同，即所谓重表法。此岛高 4 里 55 步，合今 1792.14 米（以魏尺 23.8 厘米入算），距大陆的测望点 102 里 150 步，合今 43911 米。

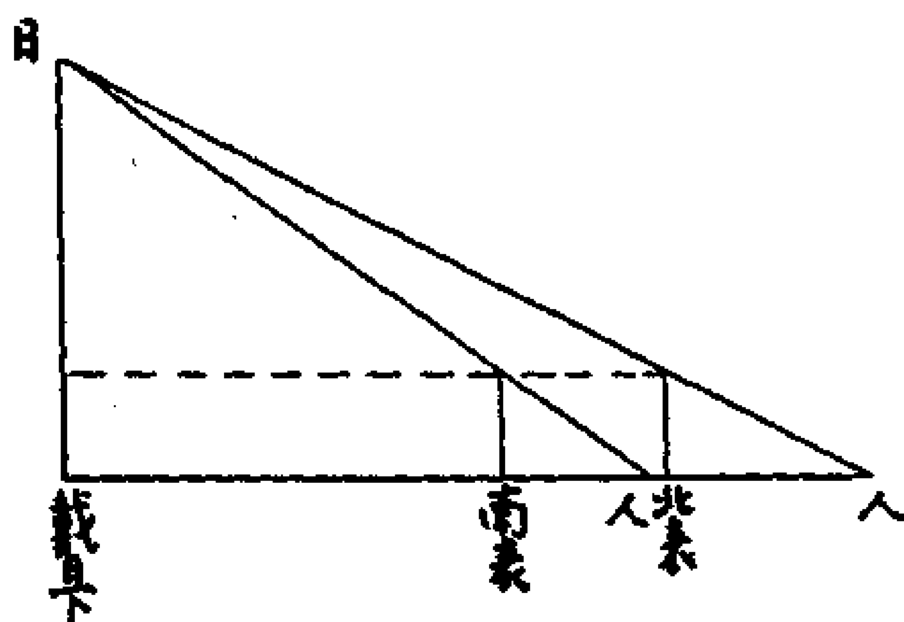


图 24　重表法

中国沿海无这样的海岛，笔者认为，刘徽是以泰山（1536 米）为原型，假托成海岛，以成为端旁不可互见的对象。刘徽曾说：圆穹的天都可以测望，"又况泰山之高与江海之广哉？"事实上，上述数据比历代史籍关于泰山高度的记载都精确得多，也比清代学者用重差术的测望结果准确得多。

连索法是重差术的另一种主要方法。《海岛》第 3 问是南望方邑，竖立两表，与人同高，东西距 6 丈，以索连之，使东表与城邑的东南角、东北角成一直线。从东表向北走 5 步，望城邑的

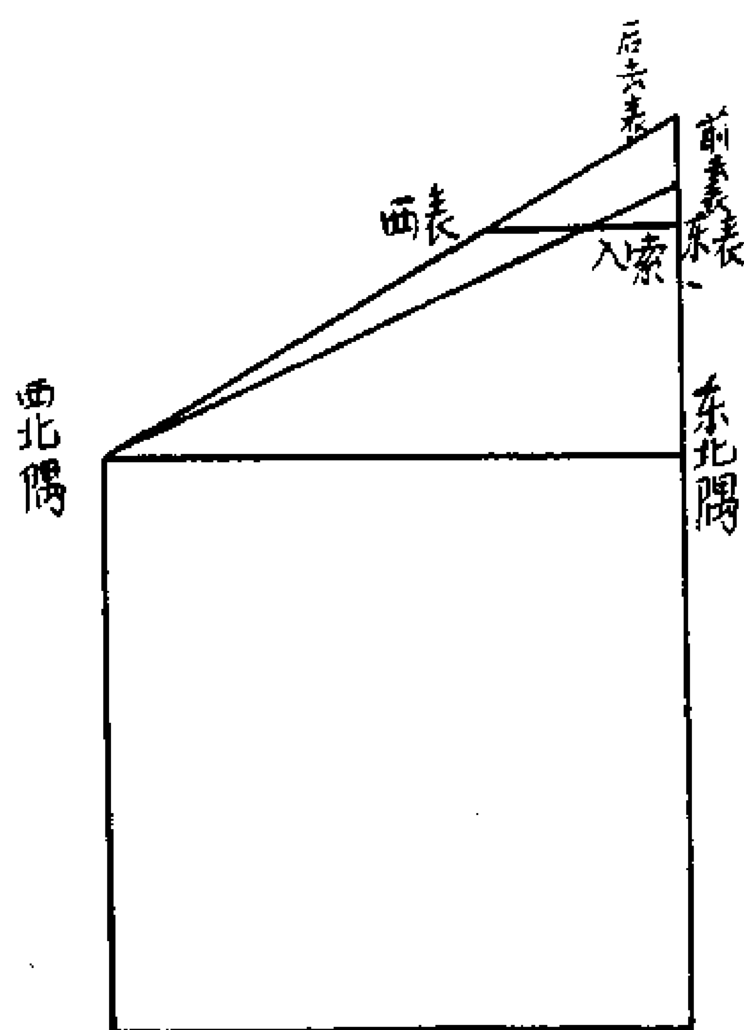


图 25 连索法

西北角，入索东端 2 丈 2 尺 6 $\frac{1}{2}$ 寸，向北走 13 步 2 尺，恰恰与西表、城邑西北角成一直线，问邑方及表到城邑的距离是多少？如图 25。刘徽先求

$$景差=\frac{入索\times后去表}{表矩},$$

则
$$邑方=\frac{入索(后去表-前去表)}{景差-前去表},$$
$$邑去表=\frac{前去表(后去表-景差)}{景差-前去表}.$$

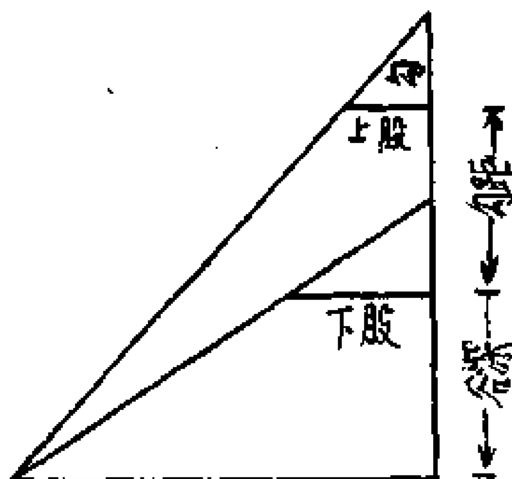


图 26 累矩法

累矩法是重差术的又一主要方法。第 4 问是测望一深谷，将矩放在深谷的岸上，矩之勾高 6 尺，从勾顶端望谷底，入下股 9 尺 1 寸，又将此矩向上移 3 丈，从勾顶望谷底，入矩之股（称为上股）8 尺 5 寸，问谷深多少？如图 26，刘徽给出公式：

$$谷深=\frac{勾距\times上股}{股差}-勾。$$

刘徽提出："度高者重表，测深者累矩，孤离者三望，离而又旁求者四望。"（《九章算术注·序》）传本《海岛算经》除上述三个问题要二次测望外，第 2、5、6、8 四题要三次测望，第 7、9 二题

要四次测望。中国的重差术到刘徽可谓大备，后来秦九韶等在测望方法上有所改进，但从数学理论上说，在明末西方数学传入之前，没什么新的突破。这些测望公式是怎么证明的，由于刘徽自注及图已失，不得而知，后人颇多探讨。有人认为用相似勾股形对应边成比例的原理，有人认为用面积出入相补原理，从中国的数学传统和当时的数学水平看，两者都是可能的。而刘徽注对复杂的问题，则常常是两者并用。



线性方程组解法

ZHONG GUO
WEN HUA SHI
ZHI SHI
CONG SHU

方程是《九章》的第八章，此后成为中国数学研究的一个重要分支。中国古代的方程对应于现今之线性方程组(*System of linear equations*)，而不是方程(*equation*)。现今求方程正根的方法，中国古代统称为开方术。1859 年，李善兰与伟烈亚力合译棣么甘的《代数学》，开始将 *equation* 译为方程，后来沿用下来。

1 方程

对古代的方程，人们往往望文生义，把"方"字理解成方形。实际上，"方"的本义是并，将两条船并起来，船头拴在一起，古代称为"方"；而"程"，是标准的意思，作为动词，便是求其标准。因此，把一组物品的一个个数量关系并列起来，求各物的数量标准，便是方程。刘徽说："群物总

杂，各列有数，总言其实。令每行为率，二物者再程，三物者三程，皆如物数程之，并列为行，故谓之方程。”（《九章算术·方程章注》）这是方程的明确定义。显然，有几个未知数，便得有几个等式。值得注意的是，刘徽提出的“令每行为率”的思想，是把方程的一行看成一个有序的即有方向性的数组，大体相当于现今线性代数理论中行向量的概念。方程以分离系数法表示，每一行自上而下排列（与今横行竖列相反，古代通常是横列竖行），不必写出未知数名称，常数项放在最下。如《九章》方程章第1问：“今有上禾三秉，中禾二秉，下禾一秉，实三十九斗；上禾二秉，中禾三秉，下禾一秉，实三十四斗；上禾一秉，中禾二秉，下禾三秉，实二十六斗。问上、中、下禾实一秉各几何？”列出方程便是如(a)所示（第89页），相当于

$$\begin{cases} 3x+2y+z=39 & (1) \\ 2x+3y+z=34 & (2) \\ x+2y+3z=26 & (3)。 \end{cases}$$

2 方程术

线性方程组解法，《九章》称为方程术，刘徽指出这是一种普遍方法，只是方法太复杂，才借助禾实来阐述。方程术的核心是通过直除法消元，逐步减少未知数的个数及方程的行数，最终消成一行一个未知数，然后再求第二、第三个未知数。所谓直除即直减：要消去乙行某未知数系数，便用甲行同一未知数的系数乘乙行所有的数，然后用甲行一次次对减乙行，直至乙行该系数为零。刘徽认为，用甲行某未知数系数乘乙行是齐，即使乙行所有项与欲消去的项相齐；用甲行对减乙行至该系数为零止是同，即使甲、乙两行的该未知数系数相同。就是说，直除法符合齐同原理。刘徽进而指出，"举率以相减，不害余数之课也。"(《九章算术·方程章注》)就是说，以方程的整行与另一行相减，不影响方程的解。这是方程消元法的理论基础。我们以《九章》方程章第1问为例说明之，并改用阿拉伯数字。以(1)式x的系数3乘(2)式各项，得

$$6x+9y+3z=102 \qquad (4)$$

以(1)式两次减(4)式,得

$$5y+z=24, \tag{5}$$

以(1)式 x 的系数 3 乘(3)式,得

$$3x+6y+9z=78, \tag{6}$$

以(1)式减(6)式,得

$$4y+8z=39, \tag{7}$$

其方程如(b)所示。以(5)式 y 的系数 5 乘(7)式,得 $20y+40z=195$,以(5)式四次减之,得 $36z=99$,以 9 约之,得 $4z=11$.

(a) (b)

(c) (d)

其方程如(c)所示。然后,用代入法,将中行与右行分别化成$4y=17$,$4x=37$,其方程如(d)所

示。于是 $x=9\frac{1}{4}, y=4\frac{1}{4}, z=2\frac{3}{4}$。可以看出，上述运算完全符合现代数学的矩阵理论：

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&2\\3&1&1\\26&34&39\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&0&3\\4&5&2\\8&1&1\\39&24&39\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&0&3\\0&5&2\\4&1&1\\11&24&39\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}0&0&4\\0&4&0\\4&0&0\\11&17&37\end{bmatrix}$$

《九章》方程术是世界上最早最完整的线性方程组解法。在国外，它最早出现在7世纪初印度婆罗门笈多（约公元598—?）的书中。在欧洲，则是法国数学家布丢在1559年提出的，比《九章》晚七八百年到1700年。

3 正负术

方程术会导致负数的产生。这里有两个途径，一是直除法消元过程中常出现小数减大数的情形，如方程章第3问；二是方程本身常出现负系数，如第4问，依题意列出 $5x-11=7y$，移

项便得 $5x-7y=11$。因此《九章》引入了负数概念和正负术。刘徽说："今两算得失相反，要令正负以名之。"(《九章算术·方程章注》)这是关于正负数的明确定义。《九章》给出：

> 正负术曰：同名相除，异名相益，正无入负之，负无入正之。其异名相除，同名相益，正无入正之，负无入负之。

这是著名的正负数加减法则。同名、异名是现今之同号、异号。前四句讲减法，其意义是：若二数同号，则其差的绝对值是其绝对值之差：$(\pm a)-(\pm b)=\pm(a-b)$，$a\geqslant b>0$；$(\pm a)-(\pm b)=\mp(b-a)$，$0<a\leqslant b$。若二数异号，则其差的绝对值是其绝对值之和：$(\pm a)-(\mp b)=\pm(b+a)$；正数没有与之对减的数，则为负数：$0-(+a)=-a$，$a>0$；负数没有与之对减的数，则为正数：$0-(-a)=a$，$a>0$。后四句是加法法则：$(\pm a)+(\mp b)=\pm(a-b)$，$a\geqslant b>0$；$(\pm a)+(\mp b)=\mp(b-a)$，$0<a\leqslant b$；$(\pm a)+(\pm b)=\pm(a+b)$，a、$b>0$；$0+(+a)=a$；$0+(-a)=-a$，$a>0$。

正负术最初只用于方程术，宋元之后才用于其他数学分支。以《九章》方程章第8问为例，

列出方程为 $\begin{array}{ccc} -5 & 3 & 2 \\ 6 & -9 & 5 \\ 8 & 3 & -13 \\ -600 & 0 & 1000 \end{array}$。以右行上系数 2 乘中行，三度减右行；以右行上系数 2 乘左行，五度加右行，得 $\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 2 \\ 37 & -33 & 5 \\ -49 & 45 & -13 \\ 3800 & -3000 & 1000 \end{array}$，以 3 约中行，得 $\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 2 \\ 37 & -11 & 5 \\ -49 & 15 & -13 \\ 3800 & -1000 & 1000 \end{array}$，以下的变换结果依次是 $\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -11 & 5 \\ 16 & 15 & -13 \\ 4800 & -1000 & 1000 \end{array} \to$

$$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 11 & 5 \\ 1 & 0 & -13 \\ 300 & 5500 & 1000 \end{array} \to \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 300 & 500 & 1200 \end{array}$$

。在这里多次应用了正负数加减法则。同时我们看到，尽管《九章》没有明确提出正负数乘除法法则，但实际上却实施了正负数乘除法运算。朱世杰在《算学启蒙》中首次提出了正负数乘法法则。

4 损益术

损益术是通过移项建立方程的方法。《九章》方程章说："损之曰益，益之曰损。"用现今的话就是，在等式一端损，相当于在另一端益；在等式一端益，相当于在另一端损。有时是损益常数项，如方程章第 2 问："今有上禾七秉，损实一斗，益之下禾二秉，而实一十斗；下禾八秉，益实一斗，与上禾二秉，而实一十斗。问上、下禾实一秉各几何？"

方程最先是：

$$\begin{cases}(7x-1)+2y=10\\2x+(8y+1)=10,\end{cases}$$

经过损益，变形为：

$$\begin{cases}7x+2y=11\\2x+8y=9.\end{cases}$$

有时既损益常数项，也损益未知数。如第 4 问："今有上禾五秉，损实一斗一升，当下禾七秉；上禾七秉，损实二斗五升，当下禾五秉。问上、下禾实一秉各几何？"

方程最先是：

$$\begin{cases}5x-11=7y\\7x-25=5y,\end{cases}$$

经过损益，变形为：

$$\begin{cases}5x-7y=11\\7x-5y=25.\end{cases}$$

损益术还包括今之合并同类项。第 11 问是："今有二马、一牛价过一万，如半马之价；一马、二牛价不满一万，如半牛之价。问牛、马价各几何？"方程最先是：

$$\begin{cases}(2x+y)-10000=\dfrac{x}{2}\\10000-(x+2y)=\dfrac{y}{2}\end{cases},$$

经过损益，得：

$$\begin{cases}\dfrac{3}{2}x+y=10000\\x+\dfrac{5}{2}y=10000\end{cases}.$$

5 互乘相消法

直除法消元显得繁琐，刘徽在方程章"牛羊直（同值）金"问中创造了互乘相消法。此问是

"今有牛五、羊二，直金十两；牛二、羊五，直金八两。问牛、羊各直金几何？"

方程是$\begin{cases}5x+2y=10\\2x+5y=8\end{cases}$.

刘徽用右行牛的系数5乘左行，又用左行牛的系数2乘右行，得

$$\begin{cases}10x+4y=20\\10x+25y=40\end{cases}.$$

两行相减，得 $21y=20$，$y=\frac{20}{21}$，这就是互乘相消法。刘徽说，以小推大，此种方法"虽四、五行不异也"，就是说，这是一种普遍方法。

可惜，刘徽的这种先进思想700多年间未引起数学家们的重视。贾宪更多地用互乘相消法为方程章题目作细草，有时互乘后先约简再相消，如方程章第5问："今有上禾六秉，损实一斗八升，当下禾一十秉；下禾一十五秉，损实五升，当上禾五秉。问上、下禾实一秉各几何？"

列出方程：

$$\begin{cases}6x-10y=18\\-5x+15y=5\end{cases},$$

"互乘两行，皆十约之"，运用正负术相消得，

$$4y=12, y=3, x=8.$$

但在有的题目中，贾宪仍用直除法。因为在这些方程中，用直除法更简便些，必须因题制宜。

秦九韶则完全废止了直除法，全部使用互乘相消法。有时他在互乘前先求出两相乘数的公约数，约简后再互乘，显得更简捷。如《数书九章》“均货推本”问列出方程

$$\begin{cases} 5x+y = 2650 \\ 33y+100z = 13250 \\ -525x+52104z = 2353200 \\ 175x + 156u = 318000 . \end{cases}$$

欲以第一行消去第三行 x 的系数 525，而 525 与第一行 x 的系数 5 有等数 5，便以 5 约 525，得 105，便以 105 乘第一行，加第三行，得

$$\begin{cases} 5x + y = 2650 \\ 33y + 100z = 13250 \\ 105y + 52104z = 2631450 \\ 175x + 156u = 318000 . \end{cases}$$

第一、四行 x 的系数有公因子 5，第二、三行 y 的系数有公因子 3，但前者比后者大，故先约后者的系数。以 3 约 33 得 11，约 105 得 35，以 11 乘第三行，以 35 乘第二行，减第三行，得

$$\begin{cases} 5x + y = 2650 \\ 33y + 100z = 13250 \\ 569644z = 28482200 \\ 175x + 156u = 318000 \end{cases}$$

便求出 z 的值。类此，依次求出 y、x、u 的值。

6 方程新术

刘徽在方程章“麻麦”问注中提出了方程新术。所谓方程新术，是通过各行相加减，借助某行消去其他各行的常数项及某些未知数，使每行中只剩下两个未知数，从而求出诸未知数的相与之率，就某一行，或利用今有术化成同为某物之数，或利用衰分术求解。麻麦问较繁琐，而雀燕问也使用了方程新术，谨以此为例。雀燕问是：今有 5 只雀、6 只燕分别飞到一天秤的两端，雀轻燕重。若将 1 只雀与 1 只燕交换，天秤恰好平衡。已知 5 只雀 6 只燕共重 1 斤。问雀、燕一只重多少？

方程是：

$$\begin{cases} 4x+y=x+5y \\ 5x+6y=16 \end{cases},$$

损益之，得

$$\begin{cases} 3x-4y=0 \\ 5x+6y=16 \end{cases}.$$

第一行已无常数项，由此得出雀、燕的相与之率：

$$x:y=4:3$$

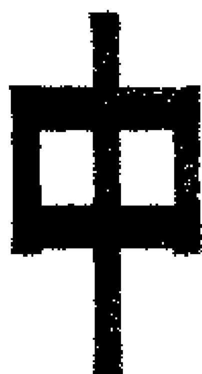
将第二行化为 x（或 y）的关系，$5x+6\times\frac{3}{4}x=16$，$\frac{19}{2}x=16$，$x=1\frac{13}{19}$，$y=1\frac{5}{19}$。

在实际问题中，由于求诸未知数的相与之率较复杂，方程新术并不见得比直除法简便。如麻麦问刘徽用旧术运算需 77 步，用新术需 124 步。由此可见，他探讨新术的目的并不在于要推广这种方法，而是要告诉人们这样一个道理：必须深刻掌握数理，灵活运用数学方法，以解决数学问题。



高次方程数值解法

ZHONG GUO
WEN HUA SHI
ZHI SHI
CONG SHU



国古代，求$\sqrt[n]{A}$，及 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$ 的正根($n=2$、3、4、……)的方法都叫开方术，是最为发达的数学分支之一。汉唐千余年间，人们只能开正系数的平方、立方，宋元时代，发展为开任意有理系数的高次方。

1 开平方

《周髀》载陈子应用勾股定理测望太阳距离时要开平方，但无开方程序。《九章》少广章提出了世界上最早的开平方的完整抽象程序。刘徽认为，开平方的几何意义是已知一正方形面积求其边长。《九章》按四行布算，最上行准备放议得(即根)，下面一行布置被开方数，称为实，第三行是法，最下一行是借一算，与实的个位相齐，这相当于 $x^2=A$，如(1)。将借算自右向左隔

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
议得			$10^n a_1$	$10^n a_1$	$10^n a_1$	$10^n a_1+10^{n-1}a_2$
实	A	A	$A-10^{2n}a_1^2$	$A-10^{2n}a_1^2$	$A-10^{2n}a_1^2$	$A-10^{2n}a_1^2$ $-(2\cdot 10^{2n-1}a_1$ $+10^{2n-2}a_2)a_2$
法			$10^{2n}a_1$	$2\cdot 10^{2n}a_1$	$2\cdot 10^{2n-1}a_1$	$2\cdot 10^{2n-1}a_1+10^{2n-2}a_2$
借算	1	10^{2n}	10^{2n}		10^{2n-2}	10^{2n-2}

一位移一步，至不能移为止。根的位数比移的步数多 1，实是个位、十位数，借一算根是一位数，实是三位、四位数，借算移一步，根是二位数，依此类推，如(2)。议所得(根的第一位)a_1，以 a_1 乘借算 10^{2n} 得 $10^{2n}a_1$，为法，应使 $A \div 10^{2n}a_1$ 得到 a_1 后余数小于 $10^{2n}a_1^2$。刘徽认为这一步是以 a_1 乘法$10^{2n}a_1$减 A，即 $A-10^{2n}a_1^2<10^{2n}a_1^2$，如(3)。其几何意义是从面积为 A 的正方形中减去以$10^n a_1$为边长的正方形黄甲，如图27。再求

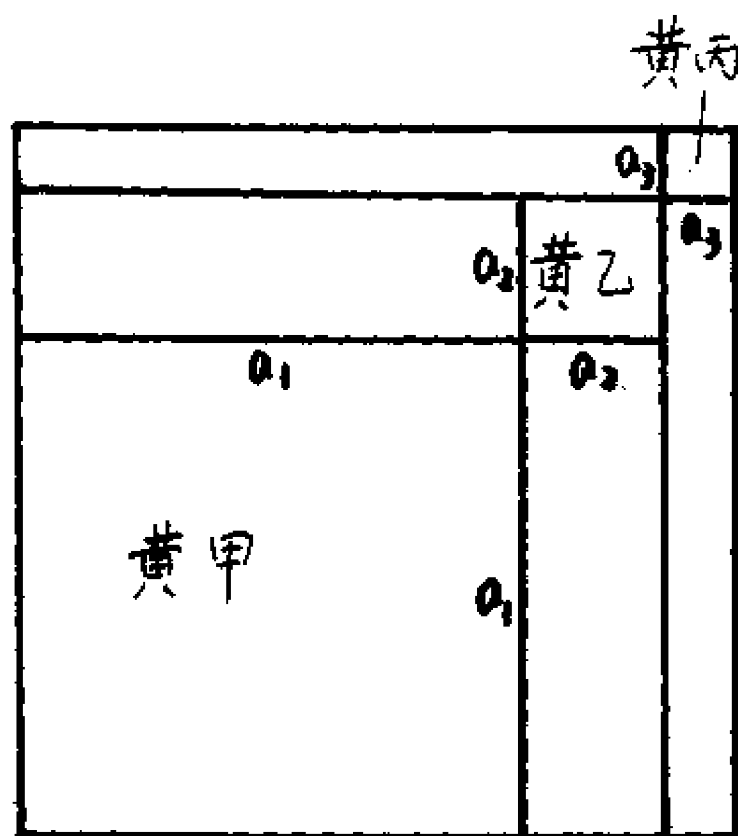


图 27 开平方术示意

第二位得数。撤去借算，将法 $10^{2n}a_1$ 加倍，为定法，如(4)。刘徽认为其几何意义是与黄甲相连的两朱幂的长 $10^n a_1$，此朱幂的宽是第二位得数。将定法向右退一位，为 $2\cdot10^{2n-1}a_1$，再在下行个位上布置借一算，自右向左隔一位移一步，显然只有 $n-1$ 步，即 10^{2n-2}。求根的第二位得数相当于求减根方程 $10^{2n-2}x_1{}^2+2\cdot10^{2n-1}a_1x_1=A-10^{2n}a_1{}^2$ 的正根，如(5)。议得 a_2，以 a_2 乘借算 10^{2n-2}，加定法，得 $2\cdot10^{2n-1}a_1+10^{2n-2}a_2$，使得 $(A-10^{2n}a_1{}^2)\div(2\cdot10^{2n-1}a_1+10^{2n-2}a_2)$ 的商是 a_2，而其余数小于 $(2\cdot10^{2n-1}a_1+10^{2n-2}a_2)a_2$。刘徽认为这一步相当于求出余实 $(A-10^{2n}a_1{}^2)-(2\cdot10^{2n-1}a_1+10^{2n-2}a_2)a_2$，如(6)。其几何意义是从正方形余下部分中减去两朱幂及以 $10^{n-1}a_2$ 为边长的小正方形黄乙。若余实仍不为零，则继续开方。显然，这种方法对任何自然数的开方都是适用的。《九章》的例题中被开方数有的高达 10 位，如 $\sqrt{3972150625}=6325$。如果被开方数是分数，则通分后，分子、分母分别开方，然后相除，如：

$$\sqrt{564752\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{2259009}{4}}=\frac{\sqrt{2259009}}{\sqrt{4}}$$

$$=\frac{1503}{2}=751\frac{1}{2}.$$

如果分母不可开（无理数），则以分母乘实，开方之后，除以分母：

$$\sqrt{\frac{A}{B}}=\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}=\frac{\sqrt{AB}}{B}\quad(A\geqslant 0,B>0).$$

《九章》少广章说："若开之不尽者为不可开，当以面命之。"这里"不可开"大体相当于无理数。《九章》之后，对开方不尽的情形，有人以 $a+\frac{A-a^2}{2a+1}$ 表示 $\sqrt{A}$ 的近似值，刘徽指出，这个值太小，应有不等式 $a+\frac{A-a^2}{2a+1}<\sqrt{A}<a+\frac{A-a^2}{2a}$。刘徽又提出，为得到 $\sqrt{A}$ 的精确近似值，求出整数部分之后，应继续开方，"求其微数"，以十进分数逼近 $\sqrt{A}$。他说："退之弥下，其分弥细，则朱幂虽有所弃之数，不足言之也。"《九章算术·少广章注》）刘徽的思想不仅开十进小数之先河，而且是保证我国圆周率计算在世界上领先千余年的先决条件，此是后话。

《孙子算经》、《张丘建算经》未提出抽象的开方程序，但从题目的开方细草中可以看出，它们在求得根的一位得数后，不再撤去借算，而是保留借算，改称下法，退二位求减根方程。它们

还吸取了刘徽的改进。北宋贾宪提出立成释锁法，继承了以往开方法的长处并加以改进，与现今方法无异。

一次项系数不为零的开方称为带从开方。《九章》勾股章有需开带从平方的例题（见第五节），而未有开方程序。但是，上述开方程序中从求第二位得数起，便是开带从方。

2　开立方

《九章算术》也提出了开立方的完整程序。

开立方术曰：置积为实。借一算步之，超二等。议所得，以再乘所借一算为法，而除之。除已，三之为定法。复除，折而下。以三乘所得数置中行。复借一算置下行。步之，中超一，下超二等。复置议，以一乘中，再乘下，皆副以加定法。以定法除。除已，倍下、并中从定法。复除，折下如前。开之不尽者，亦为不可开。若积有分者，通分内子为定实。定实乃开之，讫，开其母以报除。若母不可开者，又以母再乘定实，乃开之。讫，令如母而一。

明白了开方术，这段文字并不难理解。这里作五行布算：议得（根）、实、法、中行、借算。刘徽以立体模型给开立方以直观几何解释。开立方是已知一正方体的体积求其边长。设其根为 $n+1$ 位，以根的一位得数的立方 $10^{3n}a_1^3$ 减实 A，便是从体积为 A 的正方体中减去以 $10^n a_1$ 为边长的

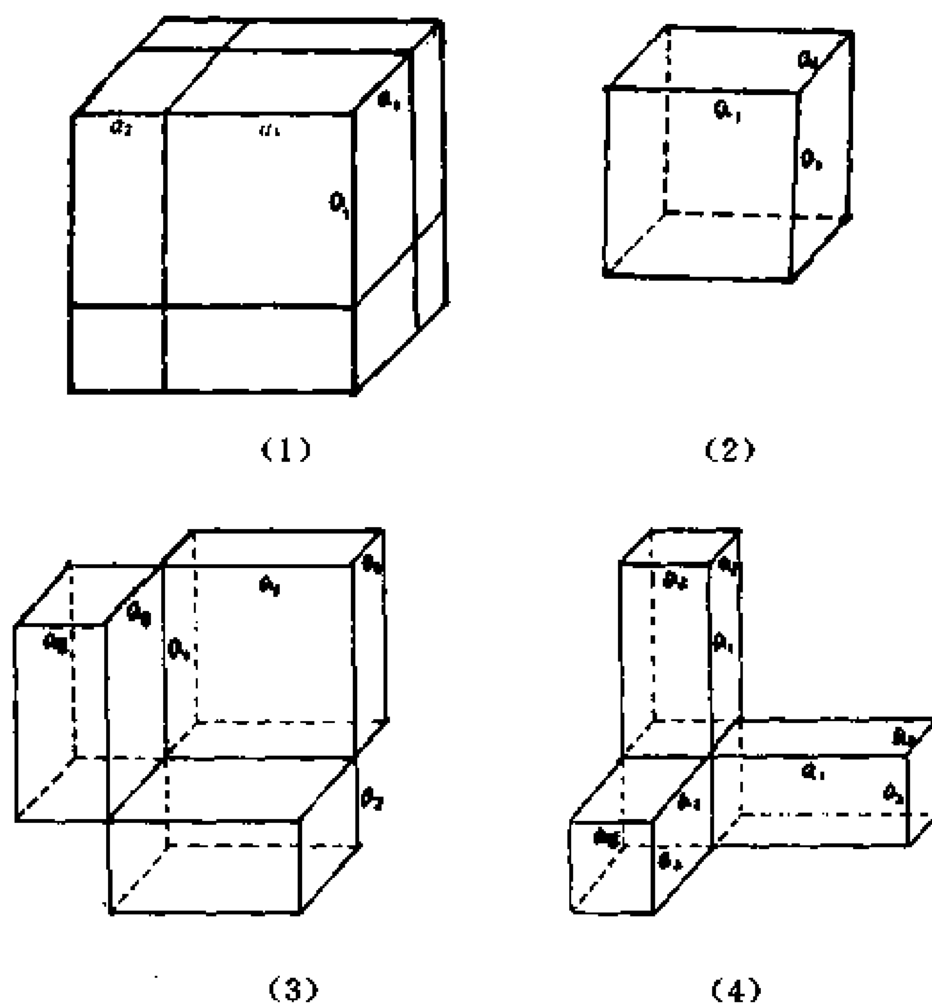


图 28 开立方术示意

正方体。$A-10^{3n}a_1^3$ 便是其剩余部分，它由三种

七块立体组成，如图 28(1)。第一种是角上的小正方体，如图 28(2)，其体积为 $10^{3n-3}x_1^3$；第二种是三块扁状小长方体，每一块体积为 $(10^n a_1)^2 \cdot 10^{n-1}x_1 = 10^{3n-1}a_1^2 x_1$，如图 28(3)；第三种是三块条状小长方体，每一块体积为 $10^n a_1 \cdot (10^{n-1}x_1)^2 = 10^{3n-2}a_1 x_1^2$，刘徽称为三长廉，如图 28(4)，廉是边的意思。因此要求 x_1 相当于求减根方程

$$10^{3n-3}x_1^3 + 3 \cdot 10^{3n-2}a_1 x_1^2 + 3 \cdot 10^{3n-1}a_1^2 x_1 = A - 10^{3n}a_1^3$$

的正根，这实际上是一个开带从立方问题。

《隋书・律历志》说祖冲之“又设开差幂、开差立，兼以正负参之，指要精密，算氏之最也。”钱宝琮认为，开差幂是开长、宽有差的长方形面积，开差立是开长、宽、高有差的长方体体积。设宽 x，长 $x+k$，高 $x+l$，则 $x(x+k)=A$ 或 $x^2+kx=A$是带从平方，就是开差幂。而 $x(x+k)(x+l)=A$ 或 $x^3+(k+l)x^2+klx=A$ 就是开差立。如果 k、l 有一个或两者都是负数，则 x^2、x 的系数可能为负，这就是要兼以正负参之的原因所在。就是说，祖冲之已能解决负系数带从平方、立方问题。可惜他的著作已失传。目前所传最早开带从立方问题出现在王孝通《缉古算经》

中，他解决了形如 $x^3+ax^2+bx=A$ 及 $x^4+ax^2=A$ 的求解问题，其中 a、$A>0$，$b\geqslant 0$。后者通过两次开平方解决。贾宪的立成释锁立方法是与现今无异的开立方法。

3 贾宪三角

贾宪把他的开方法叫立成释锁。释锁形象地比喻开方像打开一把锁；而唐宋历算家把载有一些计算常数的算表称为立成；立成释锁法就是借助某种算表进行开方的方法。贾宪把开方法的立成称作开方作法本源，今天称之为贾宪三角。目前中学课本与若干小册子把它称作杨辉三角，是以讹传讹。实际是，它保存在杨辉书中，而杨辉明确指出“贾宪用此术”。

贾宪三角是将整次幂二项式 $(a+b)^n$ ($n=0,1,2,3,\cdots$) 的展开式的系数摆成的三角形，如图 29。这个图下面有五句话：“左衺乃积数，右衺乃隅算，中藏者皆廉。以廉乘商方，命实而除之。”(《永乐大典》所引《详解〈九章〉算法》)前三句说明了贾宪三角的结构：最外左右斜线上的数字，分别是 $(x+a)^n$ ($n=0,1,2,\cdots$) 展开式中

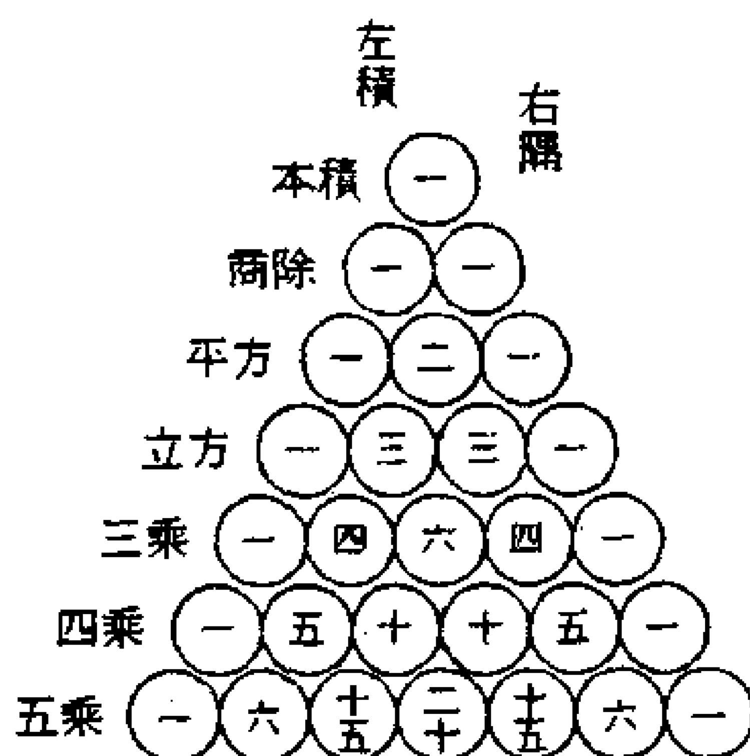


图 29 贾宪三角

积 a^n 和隅算 x^n 的系数，中间的数二，三、三，四、六、四，……分别是各廉。后两句说明了各系数在立成释锁方法中的作用。二，三、三分别在开平方、开立方中的作用，上面已经看到了；四、六、四，五、十、十、五，……分别在开四次、五次……方中的作用与此类似。贾宪三角的提出，表明贾宪实际上已把立成释锁方法推广到高次方，这是一个重大突破。

贾宪三角之后附有造法，即"增乘方求廉法：列所开方数，以隅算一，自下增入前位，至首

第一位	1	$1+5=6$				
第二位	1	$1+4=5$	$5+10=15$			
第三位	1	$1+3=4$	$4+6=10$	$10+10=20$		
第四位	1	$1+2=3$	$3+3=6$	$6+4=10$	$10+5=15$	
第五位	1	$1+1=2$	$2+1=3$	$3+1=4$	$4+1=5$	$5+1=6$

位而止。复以隅算如前升增，递低一位求之。”(《永乐大典》所引《详解〈九章〉算法》)贾宪还给出了求六次方各廉的细草，如第110页所示。最后得到六、十五、二十、十五、六便是六次方的各廉。显然，用这种方法可以求出任意高次方的各廉。换言之，贾宪已能把贾宪三角写到任意多层。

后来，朱世杰用两组平行线将贾宪三角的数联结起来，如图30，说明贾宪三角还成为朱世杰解决高阶等差级数求和问题的主要工具。

15世纪，阿拉伯数学家阿尔·卡西用直角三角形表示了同样意义的三角形。16、17世纪欧洲许多数学家都提出过这个三角形，其中以帕斯卡最有名，被称作帕斯卡三角。

4　增乘开方法

贾宪创造的增乘开方法，又称递增开方法，把开方技术推进到一个新的阶段。目前中学数学教科书中的综合除法的程序与此相类似。它主要用随乘随加代替一次使用贾宪三角的各廉。我们以开1336336的四次方(古代称为三乘

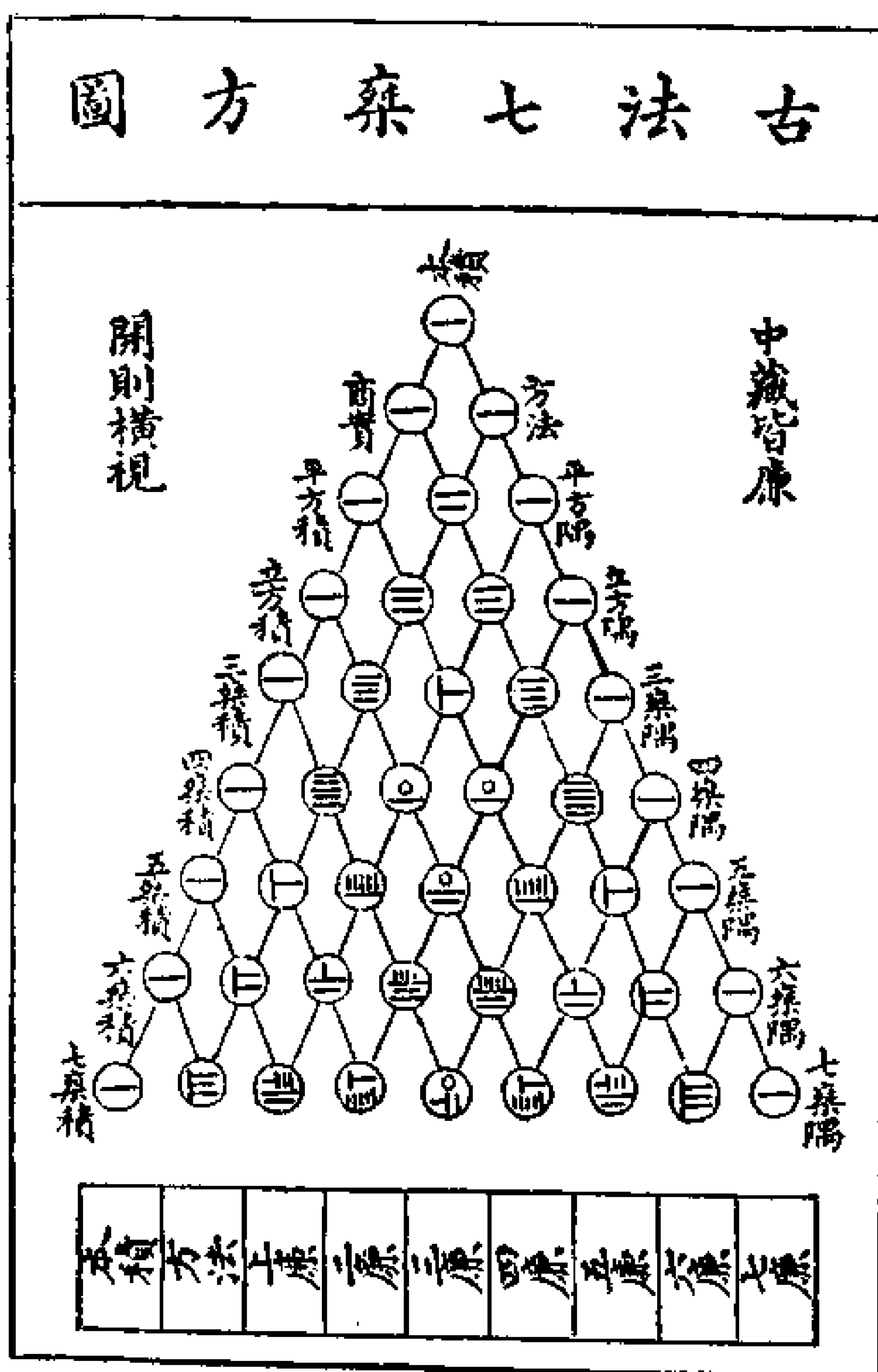


图 30 朱世杰改进的贾宪三角

方）为例说明之。

递增三乘开方法草曰[1]：(1)置积为实。别置一算名曰下法于实末。常超三位，约实。〔一乘超一位，三乘超三位。万上定实。〕(2)上商得数〔三十〕；乘下法，生下廉〔三十〕；乘下廉，生上廉〔九百〕；乘上廉，生立方〔二万七千〕。命上商，除实〔余五十二万六千三百三十六〕。(3)作法：商第二位得数。以上商乘下法，入下廉〔共六十〕；乘下廉，入上廉〔共二千七百〕；乘上廉入方〔共一十万八千〕。(4)又乘下法入下廉〔共九十〕；乘下廉入上廉〔共五千四百〕。又乘下法入下廉〔共一百二十〕。(5)方一、上廉二、下廉三、下法四退〔方一十万八千，上廉五千四百，下廉一百二十，下法定一。〕。(6)又于上商之次续商置得数〔第二位：四〕。以乘下法入下廉〔一百二十四〕；乘下廉入上廉〔共五千八百九十六〕，乘上廉并为立方〔一十三万一千五百八十四〕。

---

[1] 此为法、草合一，原以大、小字区别，今将草放入方括号中。以下的(1)、(2)、(3)、……是作者加的，以便与下图示相应。

命上商，除实，尽，得三乘方一面之数〔如三位立方，依第二位取用〕。

其计算草图应为：

(1)布位定位

商							
实	1	3	3	6	3	3	6
立方							
上廉							
下廉							
下法							1

(2)商第一位

商					3	
实	5	2	6	3	3	6
立方	2	7				
上廉		9				
下廉		3				
下法		1				

(3)作法求第二位

商						3	
实		5	2	6	3	3	6
立方	1	0	8				
上廉		2	7				
下廉			6				
下法			1				

(4)作法求第二位

商						3	
实		5	2	6	3	3	6
立方	1	0	8				
上廉		5	4				
下廉		1	2				
下法			1				

(5)作法求第二位

商					3		
实	5	2	6	3	3	6	
立方	1	0	8				
上廉			5	4			
下廉				1	2		
下法							1

(6)商第二位

商					3	4
实	5	2	6	3	3	6
立方	1	3	1	5	8	4
上廉			5	8	9	6
下廉				1	2	4
下法						1

这是有文字记载的第一个开四次方程序，它比立成释锁法简便。这个开方如果不用随乘随加，便要利用贾宪三角第五层，计算 $4\cdot 3$，$6\cdot 3^2$，$4\cdot 3^3$。同时，它的程序化比立成释锁法更强，只要作好第一步布位定位，掌握退位步数，那么以商自下而上递乘递加，每低一位而止，对任何次方都相同。开方次数愈高，商的位数愈多，数字愈大，就愈显得这种方法优越。后来在阿拉伯地区产生了同样的方法。而在欧洲，直到上世纪初

才先后由鲁菲尼与霍纳创造出来，故称为鲁菲尼—霍纳法或霍纳法，比贾宪晚 800 余年。

5　正负开方术

祖冲之求解负系数方程的资料已佚。现存史料中，第一次突破方程系数为正的限制的是北宋 12 世纪数学家刘益。据杨辉《田亩比类乘除捷法》所引，刘益《议古根源》中提出了形如 $x^2-12x=864$，$-5x^2+228x=2592$，$-5x^4+52x^3+128x^2=4096$ 的方程，可见他还突破了首项系数是 1 的限制。刘益为解决这些负系数方程，提出了益积开方术和减从开方术。杨辉说刘益的方法"实冠前古"。这两种方法尚不是增乘方法，后者与增乘开方法比较接近。

秦九韶提出正负开方术，把以增乘开方法为主体的高次方程数值解法发展到十分完备的程度。他的方程有的高达 10 次，方程系数在有理数范围内没有限制。他规定实常为负，这实际上是求解如下方程的正根：

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0\ (a_0\neq 0, a_n<0).$$

秦氏正负开方术的完整表述在《数书九章》田域类“尖田求积”问中：已知两尖田合成的一段田地，大斜 39 步，小斜 25 步，中广 30 步，求其面积（如图 31）。此题归结为开玲珑三乘方[①]：

$$-x^4+763200x^2-40642560000=0$$

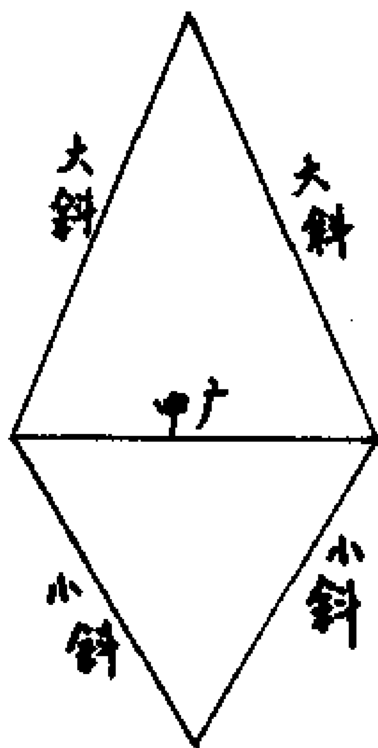


图 31 尖田

其开方过程是：

① 若方程的奇次幂系数皆为零时，则称之为“开玲珑某乘方”。

	商
-40642560000	实
0	方
763200	上廉
0	下廉
-1	益隅

(1) 列开方式:开玲珑三乘方。

800	商
-40642560000	实
0	方
763200	上廉
0	下廉
-1	益隅

(2) 上廉超一位,益隅超三位,商数进一位。上廉再超一位,益隅再超三位,商数再进一位,上商八百为定。

800	商
38205440000	实
98560000	方
123200	上廉
-800	下廉
-1	益隅

(3) 以商生隅,入益下廉,以商生下廉消从上廉,以商生上廉,入方,以商生方,得正积,乃与实相消。以负实消正积,其积乃有余,为正实,谓之"换骨"。

800	商
38205440000	实
-826880000	方
-1156800	上廉
-1600	下廉
-1	益隅

(4) 一变,以商生隅,入下廉。以商生下廉,入上廉内,相消。以正负上廉相消。以商生上廉,入方内,相消。以正负方相消。

800	商
38205440000	实
-82688000	方
-3076800	上廉
-24.00	下廉
-1	益隅

(5) 二变：以商生隅，入下廉；以商生下廉，入上廉。

800	商
38205440000	实
-82688000	方
-3076800	上廉
-3200	下廉
-1	益隅

(6) 三变：以商生隅，入下廉。

800	商
38205440000	实
-826880000	方
-3076800	上廉
-3200	下廉
-1	益隅

(7) 四变：方一退，上廉二退，下廉三退，隅四退；商续置。

840	商
00000000000	实
-955136000	方
-3206400	上廉
-3240	下廉
-1	益隅

(8) 以方约实，续商置四十，生隅入下廉内。以商生下廉，入上廉内。以商生上廉，入方内。以续商四十命方法，除实，适尽。所得商数八百四十步为田积。

秦九韶指出“后篇效此”，表明这是一种普遍方法。这个开方中，出现常数项由负变正的情况，秦九韶称为“换骨”。开方过程中，还会出现常数项绝对值增大的情形，秦氏称为“投胎”。秦氏提出这些情形，目的在于指示人们遇到反常情形不要裹足不前，而是要继续下去。

正负开方术是13世纪宋元数学家的共识。南宋的杨辉，金元的李冶、朱世杰对此都有贡献。李冶、朱世杰不再规定实常为负，而是可正可负，并对常数项变号或绝对值增大的情况也提出了处理意见。数学家们还提出了之分法。如《益古演段》第40题需求 $-22.5x^2-648x+23002=0$ 的正根，就原式开方，开不出准确根，李冶便以22.5乘常数项23002，得517545，一次项系数不变，二次项系数变为-1，再开方，即求 $-y^2-648y+517545=0$ 的正根。这实际上是作变换 $y=22.5x$，求出 $y=465$，因此，$x=465\div22.5=20\frac{2}{3}$。朱世杰把这种方法推广到高次方。《四元玉鉴》的“和分索隐”门第13问的开方式是 $576x^4-2640x^3+1729x^2+3960x-1695252=0$。他开得正根的整数部分8之后，尚有余式

$$576x_1^4+15792x_1^3+159553x_1^2$$
$$+704392x_1-545300=0,$$

便以 576^3 乘常数项，576^2 乘一次项系数，576 乘二次项系数，三次项系数不变，以 1 为首项系数，开方式化成

$$y^4+15792y^3+91902528y^2$$
$$+233700360192y-104208452812800=0。$$

这实际上进行变换 $y=576x_1$，开方得 $y=384$，因此 $x_1=\frac{y}{576}=\frac{384}{576}=\frac{2}{3}$，$x=8\frac{2}{3}$。之分法又称作连枝同体术，是非常巧妙的。

6 根与系数的关系

刘益《议古根源》根据已知"直田积 864 步，只云长阔共 60 步"，连续提出两个问题，一是"欲先求阔步得几何？"一是"欲先求长步，问得几何？"显然此二问都归结到同一方程 $-x^2+60x=864$，它的两个根 $x_1=24$，$x_2=36$ 便分别为这两个问题的答案。但是刘益和杨辉都未能从这一例子认识到二次及其以上的方程可能有多于一个的正根，并进而讨论根与系数的关系

问题。直到清中叶中国古典数学复兴，汪莱、李锐才考虑这个问题，取得了杰出的成就。汪莱1801年在《第五册算书》中首先提出二次方程可能有一个或二个正根，三次方程可能有一个、二个或三个正根。秦九韶、李冶书中的方程有许多不只一个正根，不加分析地取其中一个为答数是不应该的。例如，形如

$$ax^2-bx+c=0,\ ax^3-bx^2+cx+d=0,$$

$$ax^3-bx^2+d=0,\ ax^3-bx^2-cx+d=0,$$

$$ax^3+bx^2-cx+d=0,\ ax^3-cx+d=0,$$

$$ax^3-bx^2+cx+d=0\ （式中\ a、b、c、d>0）$$

的几个方程如有正根，便不只一个，而 $ax^3-bx^2+cx-d=0$ 的正根可能是一个，可能是三个。他还明确指出，如 x_1, x_2, x_3 是其正根，则 $x_1+x_2+x_3=\frac{b}{a}$，$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=\frac{c}{a}$，$x_1x_2x_3=\frac{d}{a}$。

汪莱初步考虑了正根个数与方程系数正负号的关系。汪莱从六安将《第五册算书》寄给扬州焦循，次年焦循携书到杭州与李锐共同研究。李锐将汪莱对二、三次方程正根的研究推广到任意高次方程，提出了三条判别根与系数关系的法则，把这项研究提高到一个新的阶段。然而

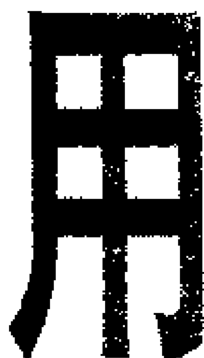
三条中第二条有语病，汪莱举出了一个反例。他们对这一问题继续研究。后来李锐撰《开方说》，提出：方程系数符号变化一次的常有一个正根，变化二次的有二正根，变化三次的有三正根或一正根，变化四次的有四正根或二正根。正根个数比符号变化次数少时，所缺少的根就是汪莱所说的“无数”，它们必定成对，没有缺一根的情形。李锐这一判别法则与欧洲 17 世纪笛卡儿的符号法则是等价的。

李锐还承认方程的根可以是负数，用增乘开方法求负根的方法与求正根一致。他认为，求出一个根之后，可用此根将方程降低一次以求第二个根，如此逐步降幂，而不必就原方程开方。李锐还首次提出方程有重根的问题。至此，中国的方程论形成了一门比较完整的学科。



天元术与四元术

ZHONG GUO
WEN HUA SHI
ZHI SHI
CONG SHU


开方术解决实际问题，包括列出开方式和开方术两方面的内容。上节介绍了开方术，现在来谈开方式造术。宋元时代，开方式造术发展成为一种专门的学问，叫做天元术。后来又发展出二元术、三元术与四元术。

1 天元术与四元术的历史

在第五节，我们已经看到了刘徽怎样从实际问题中抽象出二次方程的。唐王孝通列出了更复杂的方程。如《缉古算经》第 15 问，已知勾股相乘幂 $ab=706\frac{1}{50}$，弦多于勾 $c-a=36\frac{9}{10}$，求勾 a、股 b、弦 c。他的术文是关于勾 a 的开方式：$a^3+\frac{c-a}{2}a^2=\frac{(ab)^2}{2(c-a)}$。自注的列开方式的思路是：

$(ab)^2=a^2b^2$,

$$\frac{(ab)^2}{2(c-a)}=\frac{a^2b^2}{2(c-a)}=a^2\ \frac{c^2-a^2}{2(c-a)}$$

$$=a^2\cdot\frac{c+a}{2}=a^2(a+\frac{c-a}{2})=a^3+\frac{c-a}{2}a^2,$$

但是，怎样想到由$\frac{(ab)^2}{2(c-a)}$开始变换，是个十分技巧的问题。不过，从刘徽到王孝通，其共同的方法是将两数相乘看成面积，三数相乘看成体积，通过出入相补原理解决。这种方法在宋朝发展为演段法，它实际上是通过等积变换列出方程的方法。在这里，未知量与已知量一样投入图形变换和数量运算。问题在于，对未知数没有统一的符号，显得繁琐。天元术以一个符号"天元一"表示未知数，通过天元多项式的运算相消，列出开方式，开方式造术有了规范的程序。

由于史料散佚，天元术的早期发展情况尚不清楚。祖颐在《四元玉鉴·后序》中谈到了天元术的发展概况。他说："平阳（今山西临汾）蒋周撰《益古》，博陆（今河北蠡县）李文一撰《照胆》，鹿泉（今河北获鹿县）石信道撰《钤经》，平水（今临汾）刘汝谐撰《如积释锁》，绛（今山西新绛县）人元裕细草之，后人始知有天元也。"就是

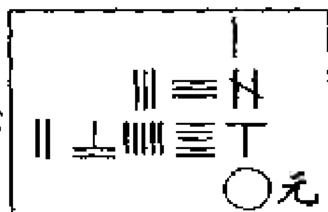
说，天元术通过从蒋周到元裕一系列数学家的不断努力，才完善起来。可惜这些著作除《益古》的部分题目保存在李冶的《益古演段》中外，其余已荡然无存。这里未提到李冶，其中元裕是不是李冶至友元好问，学术界亦未有定论。无论如何，李冶时代，天元术已是北方金元数学家的共同财富，《测圆海镜》、《益古演段》只是目前传世的使用天元术的最早的著作。李冶的笔记中对天元术的发展情况则谈得更为详细。他年轻时在东平县看到一算经，以人表示常数项，居中，仙、明、霄、汉、垒、层、高、上、天表示未知数的9、8、…2、1次幂，居人之上，地、下、低、减、落、逝、泉、暗、鬼表示未知数的－1、－2、…－8、－9次幂，居人之下。后来他看到的天元术著作取消了表示各幂次的汉字，而以天元表示正幂，在上，地元表示负幂，在下，其幂次按位置值表示，在上距天元愈远，幂次愈高，在下距地元愈远，幂次愈低。太原彭泽、彦材作了重大改革，他们交换天元、地元的位置，采取天元在下，地元在上的方式。我们知道，开方图式中常数项在上，之下依次排列未知数的一次、二次……幂，彦材的改革使天元术表示法与开方图式一致，简便

得多了。李冶《测圆海镜》表明，洞渊已经有了立天元一的明确步骤。李冶对天元术的重大贡献在于，他取消了表示负幂的地元，只用一个“元”字表示未知数的一次幂，或用“太”表示常数项，其他幂次皆按位置值给出，进一步简化了天元术的表示和运算。他在《测圆海镜》中仍取正幂在上，负幂在下的方式，在《益古演段》中则颠倒过来，正幂在下，负幂在上，后来的数学家都采取这种方式。

人们把天元术与方程术结合起来，便创造了二元术、三元术与四元术，即二元、三元、四元联立高次方程组的解法。祖颐在叙述了天元术的历史之后，接着写道：“平阳李德载因撰《两仪群英集臻》兼有地元，霍山（今霍县）邢先生颂不高弟刘大鉴润夫撰《乾坤括囊》，末仅有人元二问。吾友燕山朱汉卿先生演数有年，探三才之赜，索《九章》之隐，按天、地、人、物立成四元。”（《四元玉鉴・后序》）李德载、刘大鉴的著作亦失传。不过此处地元不再表示负幂，而是与天元并列的另一未知数。三元术则以天、地、人为未知数，四元术以天、地、人、物为未知数。

2 天元术

天元术的基本思想是：首先立所求的量为天元一，根据问题的条件给出两个等价的天元式，使两个天元式相减，便得到一个开方式，即一个方程式。后面这个过程叫做如积相消。而如积释锁则包含了列方程、解方程的完整过程。显然，立某量为天元一相当于今天的设某某为未知数 x，天元式相当于今天的含未知数的多项式。如按《测圆海镜》的记法



便表示多项式 $x^4-332x^3+27556x^2$。我们以《测圆海镜》卷七第 2 问为例展示天元术。此题是

> 假令有圆城一所，不知周径。或问丙出南门直行一百三十五步而立，甲出东门直行十六步见之。问径几何？又法曰：二行相乘得数，又自之，为三乘方实。并二行步，以乘二行相乘数，又倍之为从。二行相并数以自乘于上，又二行相减数自乘减上位为第一廉。第二廉空。一益隅。益积开之得半径。

如图 32，设南行 EA 为 k，东行 FB 为 l，则此即要求解方程

$$-x^4+4klx^2+2kl(k+l)x+(kl)^2=0.$$

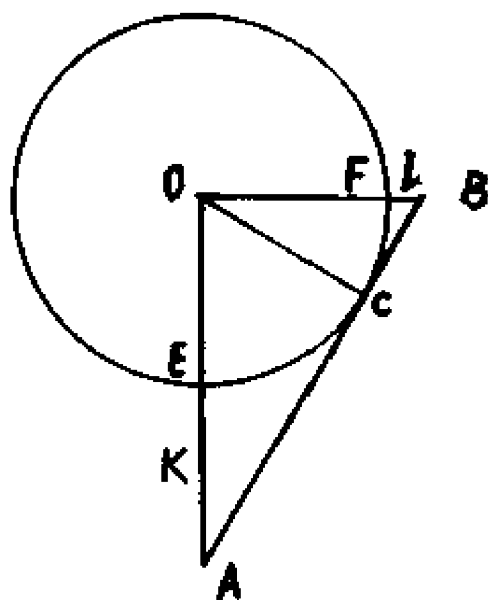


图 32　测圆

李冶用天元术推导这个四次方程的方法是：

草曰：立天元一为半城径，副置之。上加南行步得

		｜	元
｜	＝	‖‖	

为股，下位加东行步得

	｜	元
一	⊤	

为勾。勾股相乘得

			｜	
	｜	≡	｜	元
＝	｜	⊥	○	

为直积一段，以天元除之得

			｜	
	｜	≡	｜	太
＝	｜	⊥	○	

为

弦。以自之，得

|
|||○||
||⊥|=|太
⊥||||=|||=○
||||⊥丅≡丅○○

为弦幂，寄左。乃以勾自之，得

|
≡||元
||≡丅

，又以股自之，得

|
||⊥○元
|≐||=||||

，二位相并得

||
|||○||元
|≐||||≐|

，为同数。与左相消，得

𝍸
○
≐丅≡○
⊥||||=|||=○
||||⊥丅≡丅○○

。开益积三乘方，得一百二十步，即半城径也。

这段文字用现代符号翻译出来就是：设 x 为圆城半径 OC。$x+k$ 为股 OA，$x+l$ 为勾 OB。由于 $AB\cdot OC=OA\cdot OB$，即 $AB\cdot x=(x+k)(x+l)$，故弦 $AB=\frac{(x+k)(x+l)}{x}$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{x^2+(k+l)x+kl}{x}\\
&=x+(k+l)+klx^{-1},
\end{aligned}
$$

$$AB^2=[x+(k+l)+klx^{-1}]^2=x^2+2(k+l)x$$
$$+k^2+l^2+4kl+2(k+l)klx^{-1}+(kl)^2x^{-2}.$$

又 $AB^2=OA^2+OB^2=(x+k)^2+(x+l)^2=2x^2+2(k+l)x+k^2+l^2$，两者相减，两端乘以 x^2，即得上述开方式。

由此可见，在李冶时代已完全掌握了天元多项式的加、减、乘法及除数为天元单项式的除法，掌握了指数的乘除法运算及合并同类项等运算。由于天元式的表示采取位置值制，故乘除数为天元幂的乘除法，只要上下移动“元”字或“太”字即可。

3　四元术

四元术就是多元高次方程组解法，它实际上包括四元术表示法和四元消法两部分内容。

四元术的表示方法是常数项居中，旁记一“太”字，天元幂系数居下，地元居左，人元居右，物元居上，其幂次由它们与“太”字的位置关系决定，不必记出天、地、人、物等字，距“太”字愈远，幂次愈高，相邻两元幂次之积记入每行列的交叉处，不相邻之元的幂次之积无相应位置，寄

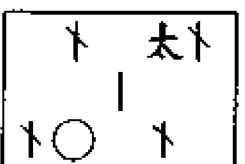
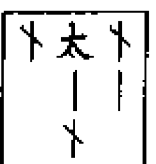
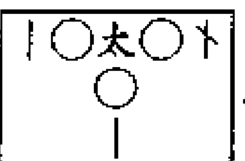
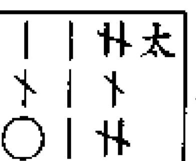
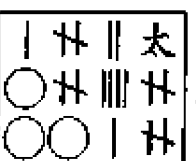
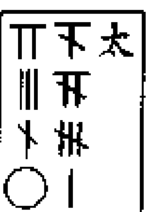
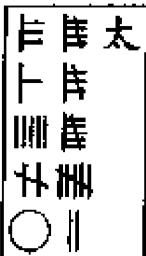
放在夹缝中，如图 33。一个筹式相当于现今的一个方程式，二元方程组列出两个筹式，三元方程组列出三个筹式，四元方程组列出四个筹式。这是一种分离系数表示法，对列出高次方程组与消元都很方便。可惜由于平面只有上、下、左、右四个方向，最多只能列出四元，高出四元的方程组便无能为力。

⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	…
…	物^{2}地^2	物^{2}地	物^2	人物^2	人^{2}物^2	…
…	物地^2	物地	物	人物	人^{2}物	…
…	地^2	地	太	人	人^2	…
…	地^{2}天	地天	天	天人	天人^2	…
…	地^{2}天^2	地天^2	天^2	天^{2}人	天^{2}人^2	…
…	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

图 33 四元布列

四元术的核心是四元消法，即将四元四式消成三元三式，再消成二元二式，最后化成一元一式，即高次开方式。朱世杰《四元玉鉴》卷首的“假令细草”中列出了天元术、二元术、三元术和四元术的范例。谨将第 3 问“三才运元”的消法

草曰：立天元一为勾，地元一为股，人元一为弦。三才相配求得

今式 ，求得云式 ，求得三元之式 。以云式剔而消之，二式皆人易天位，前得 ，后得 。互隐通分，相消，左得 ，右得 。

解：设 x 为勾 a，y 为股 b，z 为弦 c，由已知条件列出

$$x+y+z-xy(z-y)=0$$ 或

$$-xy^2+xyz-x-y-z=0 \text{（今式）}.$$

同样

$$-x^2+x+xz-y-z=0 \text{（云式）}.$$

$$x^2+y^2-z^2=0 \text{（三元式）}.$$

以云式减今式，以 x 除，并将 $y^2=z^2-x^2$，$y=-x^2+x+xz-z$ 代入，便得到前式：

$$x^2+x-x^2z+xz-z+xz^2-2z^2-2=0.$$

将 $y=-x^2+x+xz-z$ 代入三元式，便得到后式：

$$x^3-2x^2+2x-2x^2z+4xz-2z+xz^2-2z^2=0.$$

并将人元摆到天元上。互隐通分相消，得到

$$(-z^2+3z+7)x+(z^3-3z^2-7z-6)=0$$

为左式，

$$(-2z^3+5z^2+11z+13)x+(2z^4-5z^3-15z^2-13z-14)=0$$

为右式。

〔罗士琳细草：以前式左行齐之，得

，消前式，得 ，又以前式消之，

得 。复以前式左行齐之，得 ，三

因前式，得 ，消之得 为左式。

以左行齐前式得 ；又以前式左行齐

〔以前式左行$(-z+1)$乘后式，

$$(-z+1)x^3+(2z^2-2)x^2+(-z^3-3z^2+2z+2)x+(2z^3-2z)=0$$

以 x 乘前式，得

$$(-z+1)x^3+(z^2+z+1)x^2+(-2z^2-z-2)x=0$$

两者相消，得

$$(z^2-z-3)x^2+(-z^3-z^2+3z+4)x+(2z^3-2z)=0$$

又以 z 乘前式

$$(-z^2+z)x^2+(z^3+z^2+z)x+(-2z^3-z^2-2z)=0$$

与之相消，得$-3x^2+(4z+4)x+(-z^2-4z)=0$

以前式左行$(-z+1)$乘此式，得

$$(3z-3)x^2+(-4z^2+4)x+(z^3+3z^2-4z)=0$$

以 3 乘前式，得

$$(-3z+3)x^2+(3z^2+3z+3)x+(-6z^2-3z-6)=0$$

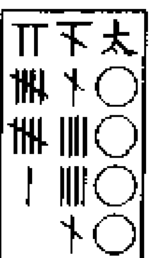
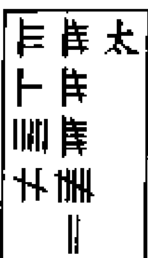
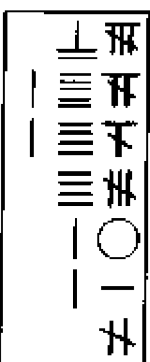
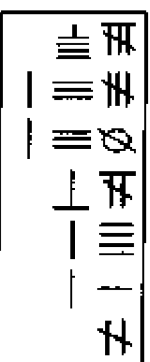
两者相消，得

$(-z^2+3z+7)x+(z^3-3z^2-7z-6)=0$ 为左式。

以左式 x 的系数$(-z^2+3z+7)$乘前式，得到

$$(z^3-4z^2-4z+7)x^2+(-z^4+2z^3+9z^2+10z+7)x+(2z^4-5z^3-15z^2-13z-14)=0$$

以前式 x^2 的系数$(-z+1)$及 x 乘左式，得

左式，得，相消得为右式。内二行得，外二行得，内外相消，四约之，得开方式，三乘方开之，得弦五步。

$$(z^3-4z^2-4z+7)x^2+(-z^4+4z^3+4z^2-z-6)x=0$$

两者相消为右式：

$$(-2z^3+5z^2+11z+13)x+(2z^4-5z^3-15z^2-13z-14)=0]$$

内二行相乘得

$$(z^3-3z^2-7z-6)(-2z^3+5z^2+11z+13)$$
$$=-2z^6+11z^5+10z^4-43z^3-146z^2-157z-78$$

外二行相乘得

$$(-z^2+3z+7)(2z^4-5z^3-15z^2-13z-14)$$
$$=-2z^6+11z^5+14z^4-67z^3-130z^2-133z-98$$

两者相减应为 0

$$4z^4-24z^3+16z^2+24z-20=0,$$

$$z^4-6z^3+4z^2+6z-5=0,$$

$$z=5.$$

解释如下。问题是："今有股弦较除弦和和与直积等。只云勾弦较除弦较和与勾同，问弦几何？"即已知$(a+b+c)\div(c-b)=ab$，$(-a+b+c)\div(c-a)=a$，及勾股定理$a^2+b^2=c^2$，求c。其解法是：（见第133－135页）

由于朱世杰的文字过于简括，"互隐通分相消"所引用罗士琳细草，只是提供一个大体说明消元过程的例子。至于是否符合朱氏原意，不得而知。事实上，许多学者有不同的细草。



垛积招差

ZHONG GUO
WEN HUA SHI
ZHI SHI
CONG SHU

垛积是高阶等差级数求和问题。一个级数若每相邻两项之差不相等而每相邻两差的差都相等，则称为二阶等差级数。同样，就明白了三阶、四阶等差级数。二阶及其以上的等差级数常称为高阶等差级数，是宋元数学的一个重要分支。而其渊源应追溯到等差级数。

1　等差级数

人们很早就认识了等差级数。《九章算术》均输章有几个等差级数的例题。如“今有金箠长五尺，斩本一尺重四斤，斩末一尺重二斤。问次一尺各重几何？”《九章》用衰分术求解，刘徽则根据首项、末项、项数先求出公差：$a_1=4$，$a_5=2$，公差$d=\frac{a_1-a_5}{5-1}=\frac{1}{2}$。刘徽实际上已掌握了$d$

$=\frac{a_n-a_1}{n-1}$。此题为递减，公差应为 $d=-\frac{1}{2}$。“九节竹”问也是一个等差级数问题。这些问题都未给出求和公式。盈不足章良驽二马问则更进了一步。在求良、驽二马 15 日所行里数时，使用了公式 $S_n=[a_1+\frac{(n-1)d}{2}]n$，这是已知等差级数的首项 a_1，公差 d，项数 n，而求前 n 项和的公式。不过，描述上述公式的文字是《九章》术文还是刘徽注，学术界有不同意见，尚难定论。刘徽又把上述公式写成：

$$S_n=a_1n+\frac{[1+(n-1)](n-1)}{2}d.$$

这可以看作是上述公式的推导。

等差级数问题在《张丘建算经》中又得到多方面发展。卷上第 22 问：“今有女善织，日益功疾，初日织五尺。今一月，共织九匹三丈。问日益几何？术曰：置今织尺数，以一月日而一，所得倍之，又倍初日尺数减之，余为实。以一月日数，初一日减之，余为法，实如法得一。”设首项 a_1，项数 n，前 n 项和 S_n，则公差 $d=(\frac{2S_n}{n}-2a_1)\div(n-1)$。第 23 问：“今有女子不善织，日减功迟，初日织五尺，末日织一尺，今三十日织讫。问织几

何？术曰：并初末日织尺数，半之，余，以乘织讫日数，即得。”设初日织 a_1，末日织 a_n，此即前 n 项和公式 $S_n=\frac{1}{2}(a_1+a_n)n$。卷上第 32 问、卷中第 1 问都是已知首项 a_1，公差 d 及各项平均值 m，求项数 $n=[2(m-a_1)+d]\div d$。卷下第 36 问是已知公差 1，首项 1，则 n 项和

$$S_n=\frac{1}{2}n(n+1).$$

2　隙积术

等差级数问题在宋元时代发展为高阶等差级数求和问题。这一课题的开创者是北宋大科学家沈括。沈括研究了《九章算术》的刍童等立体体积公式（见第四节），认为已相当完备，但是，没有求隙积的方法。隙积就是积之有隙者，如将一颗颗棋子、坛、罐等垒起来，如图 34，虽然有刍童的形状，但因有刻缺空隙，若用刍童术求积，数值偏小。沈括便提出了隙积术。设隙积的上底宽 a_1，长 b_1，下底宽 a_2，长 b_2，高 n 层，且 $a_2-a_1=b_2-b_1=n-1$，沈括提出的隙积术是：

$$S=a_1b_1+(a_1+1)(b_1+1)$$

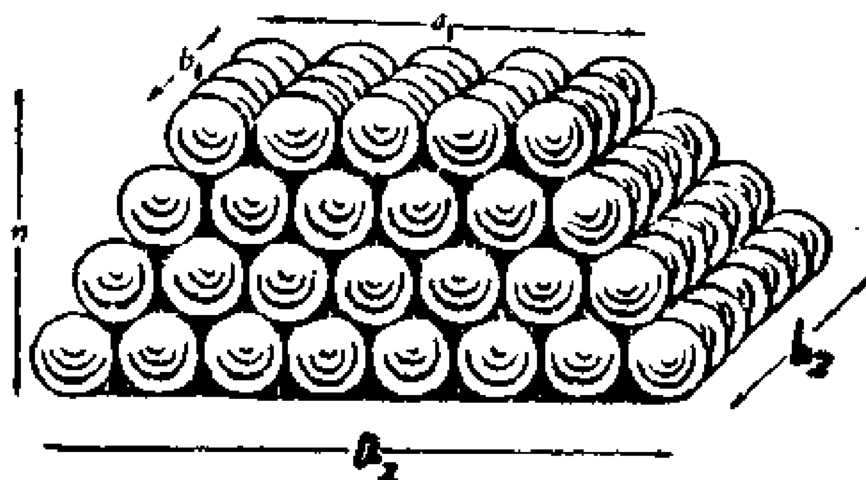


图 34　隙积

$$+(a_1+2)(b_1+2)+\cdots+a_2b_2$$

$$=\frac{n}{6}[(2a_1+a_2)b_1+(2a_2+a_1)b_2+(a_2-a_1)].$$

即刍童状隙积中物件的个数比刍童体积多$\frac{n}{6}\times(a_2-a_1)$。隙积术实际上是一个二阶等差级数求和问题：

级数	a_1b_1	$(a_1+1)(b_1+1)$	$(a_1+2)(b_1+2)$	$(a_1+3)(b_1+3)$	$(a_1+4)(b_1+4)\cdots$
一阶差	a_1+b_1+1	a_1+b_1+3	a_1+b_1+5	a_1+b_1+7	$\cdots$
二阶差	2	2	2	2	$\cdots$

南宋杨辉《详解九章算法》以各种菓子垛比类《九章》的立体。其中刍童形菓子垛与沈括的隙积术相同。四隅垛（比类方锥、阳马）的求积公

式为：

$$S_n=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$$
$$=\frac{1}{3}n(n+1)(n+\frac{1}{2}).$$

方垛（比类方亭）的求积公式为：

$$S_n=a^2+(a+1)^2+(a+2)^2+$$
$$\cdots+(b-1)^2+b^2$$
$$=\frac{n}{3}(a^2+b^2+ab+\frac{b-a}{2}).$$

三角垛（比类鳖臑）的求积公式为：

$$S_n=1+3+6+10+\cdots+\frac{n(n+1)}{2}$$
$$=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2).$$

不难看出，这都是二阶等差级数求和问题。同时，可以看出，在沈括的隙积术中令 $a_1=b_1=1$，$a_2=b_2=n$，便是杨辉的四隅垛公式；令 $a_1=b_1$，$a_2=b_2$，便是杨辉的方垛公式；令 $a_1=1,b_1=2,a_2=n,b_2=n+1$，便成为两个三角垛之和

$$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+n(n+1)$$
$$=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2).$$

两端除以 2，便得到杨辉的三角垛公式。

3　垛积术与招差术

杨辉的二阶等差级数求和解法通常叫垛积术，朱世杰则把垛积术的研究推向最高峰。《四元玉鉴》卷中“茭草形段”、“如象招数”和卷下“果垛叠藏”三门33题中，都是已知高阶等差级数总和求其项数的问题。为了解决这些问题，需要按照各自的求和公式列出一个高次方程来，然后用“正负开方术”求其根。在这些问题中，朱世杰提出了一系列三角垛公式：

茭草垛（或称茭草积）：

$$S_n=\sum_{r=1}^{n}r=1+2+3+\cdots+n$$
$$=\frac{1}{2!}n(n+1).$$

三角垛（或落一形垛）：

$$S_n=\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{2!}r(r+1)$$
$$=1+3+6+\cdots+\frac{1}{2}n(n+1)$$
$$=\frac{1}{3!}n(n+1)(n+2).$$

撒星形垛（或三角落一形垛）：

$$S_n=\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{3!}r(r+1)(r+2)$$
$$=1+4+10+\cdots$$
$$+\frac{1}{3!}n(n+1)(n+2)$$
$$=\frac{1}{4!}n(n+1)(n+2)(n+3).$$

三角撒星形垛(或撒星更落一形垛)：

$$S_n=\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{4!}r(r+1)(r+2)(r+3)$$
$$=1+5+15+\cdots$$
$$+\frac{1}{4!}n(n+1)(n+2)(n+3)$$
$$=\frac{1}{5!}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4).$$

三角撒星更落一形垛：

$$S_n=\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{5!}r(r+1)(r+2)$$
$$(r+3)(r+4)$$
$$=1+6+21+\cdots$$
$$+\frac{1}{5!}n(n+1)$$
$$(n+2)(n+3)(n+4)$$
$$=\frac{1}{6!}n(n+1)(n+2)$$
$$(n+3)(n+4)(n+5).$$

这些公式在朱世杰的书中似乎没有条理，但是，从它们之中，后一个被称作前一个的落一形垛，

即前一个的前 n 项之和是后一个的第 n 项来看，它们在朱世杰的头脑中是形成了一个完整的体系的。[①] 我们再看它们与贾宪三角的关系：上述各级数依次是贾宪三角第 2、3、4、5、6 条斜线上的数字，而其和恰恰是第 3、4、5、6、7 条斜线上的第 n 个数字，这就是为什么朱世杰用两组平行于左、右两斜的平行线将贾宪三角的各个数联结起来。可见，朱世杰已经掌握了三角垛的一般公式：

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{p!} r(r+1)(r+2)\cdots(r+p-1)$$

$$=\frac{1}{(p+1)!} n(n+1)(n+2)\cdots(n+p).$$

显然，当 $p=1,2,3,4,5$ 时便是上述三角垛公式。朱世杰还解决了以四角垛之积为一般项的一系列高阶等差级数求和问题，以及岚峰形垛等更复杂的级数求和问题。

郭守敬（公元 1231—1316 年）、王恂（公元 1235—1281 年）等元朝天算学家曾用招差术推算日、月的按日经行度数。朱世杰也把用招差术

---

① 参见杜石然：《朱世杰研究》，载《宋元数学史论文集》，科学出版社，1966。

解决高阶等差级数求和问题发展到十分完备的程度。“如象招数”门第5问附录中：“（今有官司）依立方招兵，初招方面三尺，次招方面转多一尺，得数为兵。今招一十五方，问招兵几何？”“术曰：求得上差二十七、二差三十七、三差二十四、下差六。求兵者：今招为上积，又今招减一为茭草底子积为二积，又今招减二为三角底子积为三积，又今招减三为三角落一积为下积。以各差乘各积，四位并之，即招兵数也。”设日数为x，$f(x)$为第x日共招兵数，则逐日招兵数为$(2+x)^3$，当$x=1,2,3,4\cdots\cdots$时，$f(x)$之值及逐级差如下：

日数	每日招兵数			
1	$3^3=27$（上差$\triangle$）			
		37（二差$\triangle^2$）		
2	$4^3=64$		24（三差$\triangle^3$）	
		61		6（四差$\triangle^4$）
3	$5^3=125$		30	
		91		6
4	$6^3=216$		36	
		127		…
5	$7^3=343$		…	
		…		…
…	……		…	

上差$\triangle=27$，二差$\triangle^2=37$，三差$\triangle^3=24$，下差$\triangle^4=6$。而上积为n，二积为以$(n-1)$为底子的茭草垛积$\sum_{r=1}^{n-1}r=\frac{1}{2!}n(n-1)$，三积为以$(n-2)$为底子的三角垛积$\sum_{r=1}^{n-2}r(r+1)=\frac{1}{3!}n(n-1)(n-2)$，下积为以$(n-3)$为底子的三角落一形垛积$\sum_{r=1}^{n-3}r(r+1)(r+2)=\frac{1}{4!}n(n-1)(n-2)(n-3)$。因此，求$f(n)$相当于列出招差公式

$$f(n)=n\triangle+\frac{1}{2!}n(n-1)\triangle^2+\frac{1}{3!}n(n-1)(n-2)\triangle^3+\frac{1}{4!}n(n-1)(n-2)(n-3)\triangle^4.$$

这一公式与现代通用形式完全一致。欧洲在格雷果里(J·Gregory)的著作(公元1670年)中才首先对招差术加以说明，而普遍公式则出现在牛顿的著作(公元1676年)中。朱世杰指出招差公式的各项系数恰恰依次是各三角垛的积，是他的突出贡献。上式中，$n=15$，则

$$f(15)=15\times27+\frac{1}{2!}15\times14\times37+\frac{1}{3!}15\times14\times13\times24$$

$$+\frac{1}{4!}15\times14\times13\times12\times6$$

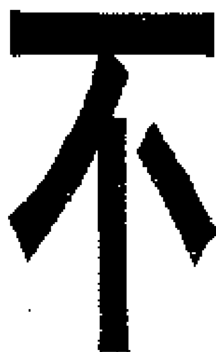
$$=23400(\text{人})$$

即为 15 日共招兵人数。



不 定 问 题

ZHONG GUO
WEN HUA SHI
ZHI SHI
CONG SHU



定问题在中国古代数学中占有重要地位。我们分勾股数组、五家共井、百鸡问题、同余式问题等几个方面阐述这一成就。

1 勾股数组

勾股定理 $x^2+y^2=z^2$ 本身就是一个不定问题，显然它有无数组解。满足该定理的有理数组 (a,b,c) 通常称为勾股数组，西方称为毕达哥拉斯数组。如何表示出勾股数组，是两千多年来数学家们关注的问题。公元前五、六世纪，毕达哥拉斯设一奇数为 $2a+1=m^2$，m 为正整数，那么 $a=\frac{1}{2}(m^2-1)$、m、$a+1=\frac{1}{2}(m^2+1)$ 就是勾股数组；后来柏拉图以 $2m$、m^2-1、m^2+1 为勾股数组公式，欧几里得以 $\sqrt{uv}$、$\frac{1}{2}(u-v)$、$\frac{1}{2}(u+v)$ 或

$mnpq$、$\frac{mn}{2}(p^2-q^2)$、$\frac{mn}{2}(p^2+q^2)$表示勾股数组，显然这些表达式并未给出全部勾股数组。

世界上第一次给出勾股数通解公式的是《九章算术》勾股章“二人同所立”问。问题是：“今有二人同所立。甲行率七，乙行率三。乙东行，甲南行十步而邪东北与乙会。问甲、乙行各几何？”显然甲行 $c+a$，乙行 b，而$(c+a):b=m:n=7:3$。《九章》先求出南行率即勾率 $a=\frac{1}{2}\times(m^2-n^2)$，东行率即股率 $b=mn$，邪行率即弦率 $c=\frac{1}{2}(m^2+n^2)$。然后根据已知南行步数，用今有术求出东行和邪行步数。这里勾、股、弦三率便是勾股数的通解表示式，其为通解的条件是 m、n 为互素的奇数，《九章》的两个例题都符合此条件。国外被认为最先给出勾股数组通解公式的是希腊的丢番都，其公式是 $a=\frac{2mc}{m^2+1}$，$b=ma-c=\frac{m^2-1}{m^2+1}c$，若令 $m=\frac{u}{v}$，$c=u^2+v^2$，则可得到与《九章》等价的公式。丢番都大约与刘徽同时，比《九章》晚了三、四百年。

《九章算术》已知勾股差与弦求勾股的问题后来也发展为勾股差率与弦率的形式：

$$c:(b-a)=p:q, \qquad 则$$

$$\begin{cases} a=\frac{1}{2}(\sqrt{2p^2-q^2}-q) \\ b=\frac{1}{2}(\sqrt{2p^2-q^2}+q) \\ c=p . \end{cases}$$

这是勾股数组的通解公式的另一种形式，其条件为 p、q 为互素奇数，$2p^2-q^2$ 是一个完全平方数。秦九韶曾用该公式成功地解决了遥度圆城的十次方程造术。美国数论专家迪克森(Dickson)1894 年提出了勾股数组的另一种形式：$\sqrt{2st}+s$，$\sqrt{2st}+t$，$\sqrt{2st}+s+t$。显然，其雏形便是《九章》勾股章已知弦勾差、弦股差求勾、股、弦的公式。

2 五家共井

《九章算术》方程章有一五家共井题："今有五家共井，甲二绠不足，如乙一绠；乙三绠不足，以丙一绠；丙四绠不足，以丁一绠；丁五绠不足，以戊一绠；戊六绠不足，以甲一绠。如各得所不足一绠，皆逮。问井深、绠长各几何？"依术列出方程是：

$$\begin{cases}2x+y=w\\3y+z=w\\4z+u=w\\5u+v=w\\x+6v=w.\end{cases}$$

《九章》按方程术解，得出 $x=265$，$y=191$，$z=148$，$u=129$，$v=76$，$w=721$。此题六个未知数，只能列出 5 行方程，消元的结果，应得到 $v=\frac{76}{721}w$。刘徽指出，《九章》的解法是"举率以言之"，实际上只给出了最小的一组正整数解。此是不定问题，是中国数学史上首次明确提出不定问题。

3　百鸡问题

《张丘建算经》也提出了一个不定问题，即世界数学史上著名的百鸡问题："今有鸡翁一直钱五，鸡母一直钱三，鸡雏三直钱一，凡百钱买鸡百只。问鸡翁、母、雏各几何？"依术列出方程

$$\begin{cases}x+y+z=100\\5x+3y+\frac{1}{3}z=100.\end{cases}$$

《张丘建算经》认识到这是一个不定方程，给出

了(4,18,78),(8,11,81),(12,4,84)三组解,是其全部正整数解。《张丘建算经》提示了解法:"术曰:鸡翁每增四,鸡母每减七,鸡雏每益三,即得。"这个提示太简括,其具体解法后人有若干猜测。钱宝琮的理解是:以3乘第2行,减第1行,化成 $7x+4y=100$,其中 $4y$ 与100都是4的倍数,因此 x 应是4的倍数:$x=4t$,那么 $y=25-7t$,$z=75+3t$,令 $t=1,2,3$,则 $x=4,8,12$,$y=18,11,4$,$z=78,81,84$。因为必须求正整数解,故 x 不能为0或负数,也不能大于12,只能有以上三组解。后来人们一直未找到百鸡问题的一般解法,直到19世纪中叶,宋元数学复兴之后,骆腾凤《艺游录》、时曰醇《百鸡术衍》用大衍求一术求解,才找到一般解法。

百鸡问题对阿拉伯、欧洲数学产生了巨大影响。13世纪意大利菲波那契的《算法之书》,15世纪阿拉伯的阿尔·卡西的《算术之钥》都有百鸡问题,显然源于中国。

4 大衍总数术与大衍求一术

中国民间历来流传着"秦王暗点兵"、"韩信

点兵”、“鬼谷算”、“隔墙算”、“剪管术”等数字游戏，实际上都是一种方法，它导源于《孙子算经》“物不知数”问，秦九韶称作“大衍总数术”，即今之一次同余式组解法。同余是数论中的一个重要概念，给定一个正整数 m，如果二整数 a、b，使 $a-b$ 被 m 整除，就称 a、b 对模 m 同余，记作 $a\equiv b(\mathrm{mod}\,m)$。“物不知数”题是：“今有物不知数，三三数之剩二，五五数之剩三，七七数之剩二，问物几何？”这是世界数学史上首次提出同余式问题。用现代符号表示，此题是求满足同余式：

$$N\equiv 2(\mathrm{mod}\ 3)\equiv 3(\mathrm{mod}\ 5)\equiv 2(\mathrm{mod}\ 7)$$

的最小正整数 N。《孙子算经》的解法是

$$N=2\times 70+3\times 21+2\times 15$$
$$-2\times 105=23.$$

其根据是：$70=2\times 5\times 7\equiv 1(\mathrm{mod}\ 3)$，$21=3\times 7\equiv 1(\mathrm{mod}\ 5)$，$15=3\times 5\equiv 1(\mathrm{mod}\ 7)$。可见《孙子算经》的作者在一定程度上明白了下面这个定理：

若 $A_i(i=1,2,\cdots n)$ 是两两互素的正整数，$R_i<A_i$，R_i 也是正整数$(i=1,2,\cdots n)$，正整数 N 满足同余式组

$N\equiv R_i(\mathrm{mod}A_i)\quad i=1,2,\cdots n$。如果能找到

诸正整数 k_i，使

$$k_i \frac{\prod_{j=1}^{n} A_j}{A_i} \equiv 1 \pmod{A_i},\ i=1,2,\cdots n,$$

则 $$N \equiv \sum_{i=1}^{n} R_i k_i \frac{\prod_{j=1}^{n} A_j}{A_i} \left(\mathrm{mod} \prod_{j=1}^{n} A_j\right)^{①}.$$

欧洲现代数学大师欧拉（公元 1707—1783 年）、拉格郎日（公元 1736—1813 年）都对同余式问题作过研究。高斯（公元 1777—1855 年）的《算术探究》（公元 1801 年）中明确写出了上述定理。来华传教士伟烈亚力（公元 1815—1887 年）1852 年将“物不知数”题介绍到西方，人们发现它与上述定理一致，遂称之为中国剩余定理。

同余式解法还来自于历法制定中上元积年的计算。中国古代的历法，要假定远古有一个甲子日，那一年的冬至与十一月的合朔都恰好在这一日的子时初刻。有这么一天的年度叫上元，从上元到制定历法的本年的总年数叫上元积年。已知本年冬至时刻及十一月平朔时刻，求

---

① $\prod_{j=1}^{n} a_j = a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$.

“上元积年”在数学上便是同余式问题。但是，“历家虽用，用而不知”（《数书九章序》），在中国数学史也是世界数学史上第一次提出一次同余式组完整解法的是南宋数学家秦九韶。

秦九韶的方法称为大衍总数术。他将诸 k_i 叫作乘率，诸 A_i 叫作定数，$\prod_{j=1}^{n} A_j$ 叫作衍母，$\frac{\prod_{j=1}^{n} A_j}{A_i}$ 叫衍数，而方法的核心是大衍求一术，即求乘率 k_i 的方法。为叙述方便，我们将 $\frac{\prod_{j=1}^{n} A_j}{A_i}$ 记为 G，将 A_i 记为 A，k_i 记为 k，求一术变成在 A、G 互素的情况下求满足 $kG\equiv 1\ (\mathrm{mod}A)$ 的 k 值。秦九韶首先提出，如果 $G>A$，若 $G\equiv g\ (\mathrm{mod}A)$，$0<g<A$，则 $kg\equiv 1\ (\mathrm{mod}A)$ 与 $kG\equiv 1\ (\mathrm{mod}A)$ 等价，这便是现代同余式理论中的传递性。因此问题变成了求满足 $kg\equiv 1\ (\mathrm{mod}A)$ 的 k。秦九韶称 g 为奇数。他的大衍求一术是：将 g 置于右上，A 置于右下，左上置天元一，g 与 A 辗转相除，商依次是 q_1、q_2、…，余数是 r_1、r_2、…，按一定规则在左下、左上计算 c_1、c_2、…，直到右

上 $r_n=1$ 为止(此时 n 必定是偶数),则左上的 $c_n=q_nc_{n-1}+c_{n-2}$便是所求的 k 值。用现代符号表示就是:

天元1	g	
	A	

1	g	
	$A=gq_1+r_1$	

1	$g=r_1q_2+r_2$	
$C_1=q_1$	r_1	q_1

$C_2=q_2c_1+1$	r_2	q_2
C_1	$r_1=r_2q_3+r_3$	

C_2	$r_2=r_3q_4+r_4$	
$C_3=q_3c_2+c_1$	r_3	q_3

$C_4=q_4c_3+c_2$	r_4	q_4
C_3	$r_3=r_4q_5+r_5$	

……

C_{n-2}	$r_{n-2}=r_{n-1}q_n+1$	
$C_{n-1}=q_{n-1}c_{n-2}+c_{n-3}$	r_{n-1}	q_{n-1}

$C_n=q_nc_{n-1}+c_{n-2}$	$r_n=1$	q_n
C_{n-1}	r_{n-1}	

这里要计算到右上 $r_n=1$,故有“求一”之名。可以证明,这种求乘率 k 的方法是正确的[①]。在上述方法中,诸 A_i 必须是两两互素的正整数,但是在实际问题中诸 A_i 不一定互素,甚至不一定

---

① 这个证明请参见钱宝琮《中国数学史》第十一章,科学出版社,1964。

是整数，可能是分数或小数。秦九韶针对不同的情况，提出了化约各种不同的问题为定数的程序。由于中国古代没有因数分解的概念，化约过程走了弯路，但毕竟比较成功地解决了这个问题。

秦九韶把大衍总数术不仅用于历法推算，而且用于建筑、行程、粜米交易、库额利息，甚至断案等问题。谨以“余米推数”问为例。有一米铺投诉被盗去三箩筐米，不知数量。左箩剩 1 合，中箩剩 14 合，右箩剩 1 合。后捉到盗米贼甲、乙、丙。甲说，当夜他摸得一只马杓，一杓杓将左箩的米舀入布袋；乙说，他踢着一只木履，将中箩的米舀入布袋；丙说，他摸得一只漆碗，将右箩的米舀入布袋。三人将米拿回家食用，日久不知其数，遂交出作案工具。量得一马杓容 19 合，一木履 17 合，一漆碗 12 合。问共丢失的米数及三人所盗的米数。这是求同余式组

$$N \equiv 1 \pmod{19} \equiv 14 \pmod{17} \equiv 1 \pmod{12}$$

的解 N。由于 19、17、12 两两互素，便为定数。衍母为 $19\times17\times12=3876$，衍数依次是 $17\times12=204$，$19\times12=228$，$19\times17=323$。求分别满足

$k_1\times 204\equiv 1\pmod{19}$，$k_2\times 228\equiv 1\pmod{17}$，$k_3\times 323\equiv 1\pmod{12}$的乘率 k_1,k_2,k_3。由于衍数分别大于定数，便用定数减衍数，得奇数 14，7，11。问题变成求分别满足 $k_1\times 14\equiv 1\pmod{19}$，$k_2\times 7\equiv 1\pmod{17}$，$k_3\times 11\equiv 1\pmod{12}$的 k_1，k_2，k_3。求 k_1 的程序：

1	14
	19=14×1+5

1	14=5×2+4
1	5　　1

2×1+1=3	4　　2
1	5=4×1+1

3	4=1×3+1
1×3+1=4	1　　1

3×4+3=15	1　　3
4	1

故 $k_1=15$.

求 k_2 的程序：

1	7
	17=7×2+3

1	7=3×2+1
2×1=2	3　　2

2×2+1=5	1　　2
2	3

故 $k_2=5$.

求 k_3 的程序：

1	11
	12=11×1+1

1	11=1×10+1	
1	1	1

10×1+1=11	1	10
1	1	

故 $k_3=11$.

于是 $N\equiv 1\times 15\times 204+14\times 5\times 228$

$+1\times 11\times 323 \pmod{3876}$

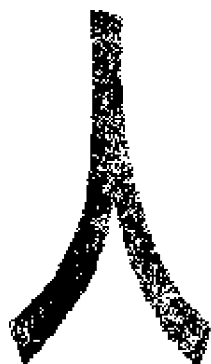
$\equiv 22573 \pmod{3876}=3193.$

每箩米数 3193 合，甲、丙盗米各为 3192 合，乙盗米 3179 合；共盗米 9563 合。



无穷小分割思想

ZHONG GUO
WEN HUA SHI
ZHI SHI
CONG SHU

们一谈到早期的无穷小分割和极限思想，往往想到古希腊的穷竭法。实际上，穷竭法并没有使用极限。在文艺复兴之前，在数学中真正使用过极限思想的是中国的刘徽。极限思想在中国萌芽很早。先秦名家有“一尺之捶，日取其半，万世不竭”的命题，墨家也有无限分割一尺之杆的方法，不过认为不会万世不竭，而最终归结为不可再分的“端”。汉司马迁《史记·酷吏列传》有“破觚为圜〔同圆〕”的说法，直观地描述了多边形通过无限分割与圆的转化关系。而刘徽在世界上最先把无穷小分割和极限思想用于数学证明。

1 割圆术

对《九章算术》的圆面积公式 $S=\frac{1}{2}Lr$，在刘徽之前是以周三径一为基础，将圆内接正6

边形周长作为圆周长，正 12 边形面积作为圆面积，用出入相补原理证明的。刘徽指出，圆的周长与直径“非周三径一之率”（《九章算术·方田章注》），这个证明是不严格的。刘徽创造了新的方法：他从圆内接正 6 边形开始割圆，得到一个正 $6\cdot 2^n$ 边形序列。设 S_n 是 $6\cdot 2^n$ 边形面积，p_n

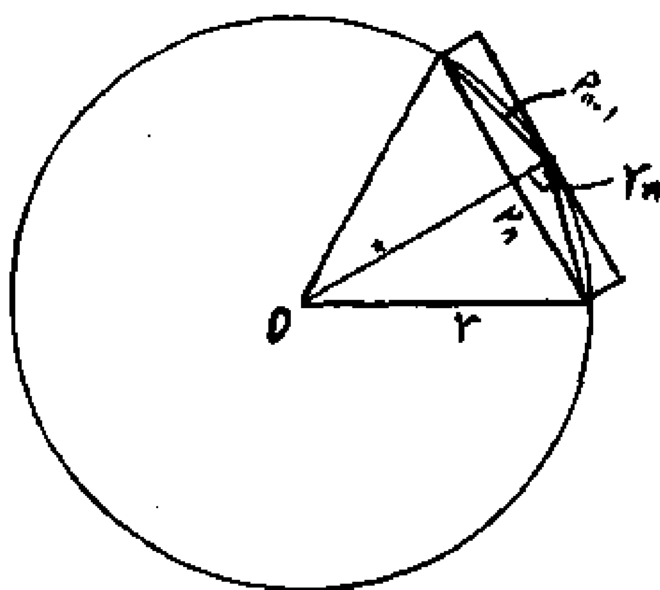


图 35　割圆术

是每边长，如图 35。显然，n 愈大，$S-S_n$ 愈小，所谓“割之弥细，所失弥少。”（同上）而“割之又割，以至于不可割，则与圆合体而无所失矣。”（同上）即证明了 $L=\lim\limits_{n\to\infty}6\cdot 2^n p_n$。$6\cdot 2^n$ 边形每边与圆周间有余径 r_n。以边长乘余径，加到 $6\cdot 2^{n-1}$边形面积上，则大于圆面积，即

$$S_n < S < S_{n-1} + 2(S_n - S_{n-1}).$$

而当 n 无限大时，$r_n \to 0$，那么

$$\lim_{n\to\infty}[S_{n-1} + 2(S_n - S_{n-1})] = S.$$

所谓“若夫觚之细者，与圆合体，则表无余径。表无余径，则幂不外出矣”。这就证明了圆面积的上界序列与下界序列的极限都是圆面积：$S = \lim_{n\to\infty} S_n$。然后，刘徽说：“以一面乘半径，觚而裁之，每辄自倍。故以半周乘半径而为圆幂。”(《九章算术·方田章注》)即将与圆合体的边数无限的正多边形分割成无限多个以圆心为顶点，以该多边形的每边为底的小等腰三角形，由于以每边长乘半径是小三角形面积的二倍，而与圆合体的正多边形的边长之和是 L，这就证明了 $S = \frac{1}{2}Lr$。显然，这里包含了几个相当严谨的极限过程，并且是通过对圆面积的无穷小分割，再求其和进行证明的。这种方法与微积分产生前的面积元素法极为接近。数学史家史密斯(D. E. Smith，公元 1860—？年)把微积分的发展概括为穷竭法、无穷小方法、流数法和极限四个阶段。刘徽已完成了前两个阶段，并已有明显的极限过程。

2 圆周率

刘徽指出，上述圆面积公式中的周径“谓至然之数，非周三径一之率也。”因此，需要求这个至然之数，这个至然之数就是圆周率。假定圆直径为 2 尺，他仍按照上述割圆程序割圆，并利用圆内接正 6 边形边长等于圆半径的性质及勾股定理，算出正 6 边形的边心距，进而求出余径 r_0，再次运用勾股定理，算出正 12 边形的边长 p_1，重复刚才的过程，依次计算出圆内接正 12、24、48 边形的边心距、余径、边长，96 边形的边长、面积及 192 边形的面积：

割次	$r-r_n$ 边心距(忽)	r_n 余径(忽)	p_n 边长(忽)	s_n 面积(寸²)
0	$866025\frac{2}{5}$	$133974\frac{3}{5}$	1000000	
1	$965925\frac{4}{5}$	$34074\frac{1}{5}$	$\sqrt{267949193445}$	
2	$991444\frac{4}{5}$	$8555\frac{1}{5}$	$\sqrt{68148349466}$	
3	$997858\frac{9}{10}$	$2141\frac{1}{10}$	130806	
4			65438	$313\frac{584}{625}$
5				$314\frac{64}{625}$

$S_5=314\frac{64}{625}$寸^2，$S_5-S_4=\frac{105}{625}$寸^2，$S_4+2(S_5-S_4)=314\frac{169}{625}$寸^2，因此，确定 314 寸^2 为圆面积近似值。利用已经证明过的圆面积公式，$314=10\cdot\frac{1}{2}L$，$L=62\frac{8}{10}$（寸），与直径 20 寸相约，得 $L:d=157:50$，相当于 $\pi=\frac{157}{50}=3.14$。许多学者认为刘徽在求得 $S=314$ 寸^2 之后，利用 $S=\pi r^2$ 求得 $\pi=3.14$，这是错误的。在计算圆周率时，刘徽并未证明 $S=\pi r^2$。恰恰相反，刘徽用 $\pi=\frac{157}{50}$ 将与 $S=\pi r^2$ 相当的公式 $S=\frac{3}{4}d^2$ 修正为 $S=\frac{157}{200}d^2$。那种错误理解会把刘徽置于他从未犯过的循环推理错误之中。

刘徽认为 $\pi=\frac{157}{50}$ 中，周率仍微少，又求出 $\pi=\frac{3927}{1250}$。

南朝祖冲之进一步将 π 值精确到 8 位有效数字，相当于求出 $3.1415926<\pi<3.1415927$。据推测，祖冲之是用刘徽割圆术求得上述值的，那么祖冲之要计算6144、12288边形的面积 S_{10}

$=314159251$ 厘^2、$S_{11}=314159261$ 厘^2[①]，$S_{10}+2(s_{11}-s_{10})=314159271$ 厘^2。祖冲之进一步确定 $\pi=\frac{355}{113}$ 为密率，$\pi=\frac{22}{7}$ 为约率。约率早被古希腊阿基米德所认识，在中国，南北朝刘宋的何承天也知道这个值。而密率则是个空前的创造，这是分母小于 16604 的一切分数中最接近 π 的真值的分数[②]。祖冲之的圆周率值在世界上领先千年左右。1427 年阿尔·卡西的圆周率精确值超过了 8 位有效数字。16 世纪末德国奥托、荷兰安托尼兹先后提出了 $\pi=\frac{355}{113}$。

3　弧田密率与会圆术

圆周率的计算及用十进分数(微数)逼近无理根实际上是极限思想在近似计算中的应用。刘徽还把这一思想用于弧田面积的计算。他首先证明了《九章算术》的弧田面积计算公式不准

① 参见钱宝琮《中国数学史话》第十五节，中国青年出版社，1957。

② 参见梁宗巨《世界数学史简编》第十六章，辽宁人民出版社，1980。

确，进而提出了求弧田密率的方法：他用勾股锯圆材的方法求出弧田所在的圆的直径，再利用类似于割圆的程序，将弧分成2、4、8…分，“割之又割，使至极细”，这就用一串小三角形面积之和逼近弧田面积。他又用勾股定理求出与上述小三角形相应的一串小弧田的弦、矢，即这串小三角形的底与高，“但举弦矢相乘之数，则必近密率矣。”用这种方法，可以把弧田面积精确到所需要的程度（如图36）。

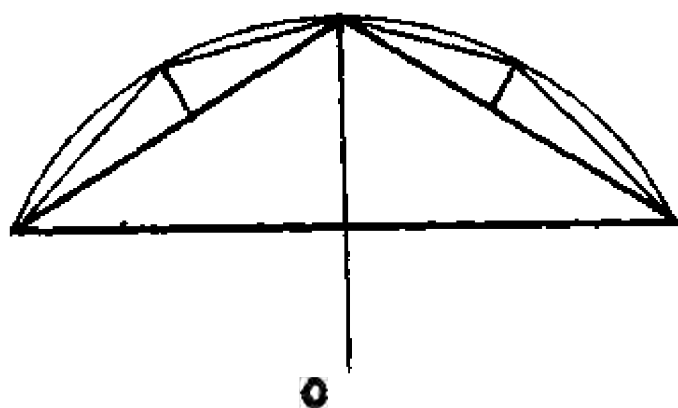


图36 弧田密率

《九章算术》和后来的数学家只考虑弧田面积，未讨论过弧长的问题。北宋科学家沈括在《梦溪笔谈》中创造了会圆术，提出了求弧长的近似公式（见图37）：

$$l=c+\frac{2v^2}{d},$$

其中d为弧所在的圆径，c、v仍是弧田的弦、

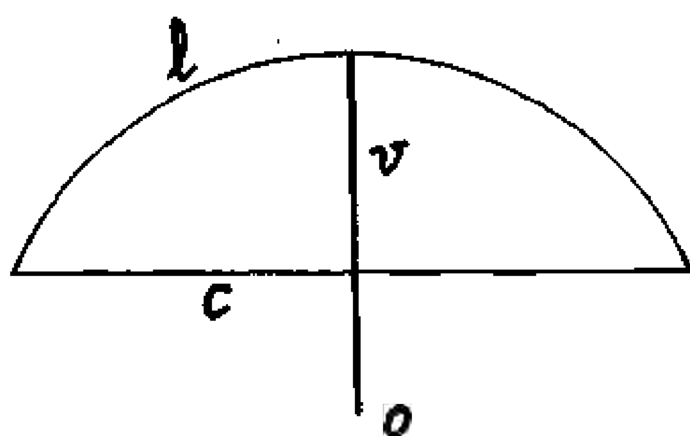


图 37　会圆术

矢。后来郭守敬、王恂制定《授时历》，多次使用了会圆术。

4　刘徽原理

对《九章》提出的阳马体积公式 $V_y=\frac{1}{3}abh$ 与鳖臑体积公式 $V_b=\frac{1}{6}abh$，刘徽之前是取 $a=b=h$ 的情形用棊验法证明的。然而在 $a\neq b\neq h$ 的情形下，一个长方体分割成的三个阳马并不全等，六个鳖臑也不全等或对称，三个阳马的体积是否相等，六个鳖臑的体积是否相等，并不是显然的，棊验法无能为力。所以刘徽说："鳖臑殊形，阳马异体。然阳马异体，则不可纯合，不纯合，则难为之矣。"（《九章・商功章・注》）他另

辟蹊径，用无穷小分割成功地完成了这两个公式的证明。为此，他首先提出了一个原理：

> 邪解堑堵，其一为阳马，一为鳖臑。阳马居二，鳖臑居一，不易之率也。

即在一个堑堵中，恒有

$$V_y : V_b = 2 : 1.$$

吴文俊把它称为刘徽原理。显然，只要证明了这个原理，由堑堵体积公式，上述两公式是不言而喻的。问题归结为证明刘徽原理。

刘徽用三个互相垂直的平面平分堑堵的长、宽、高，则其中的阳马分成一个小立方Ⅰ，两个小堑堵Ⅱ、Ⅲ和两个小阳马Ⅳ、Ⅴ，鳖臑分成两个小堑堵Ⅱ′、Ⅲ′和两个小鳖臑Ⅳ′、Ⅴ′。它们可以拼合成四个全等的Ⅱ—Ⅱ′、Ⅲ—Ⅲ′、Ⅳ—Ⅳ′、Ⅴ—Ⅴ′和小立方Ⅰ。（见图 38）显然，在前三个小立方中，亦即在堑堵的$\frac{3}{4}$中，属于阳马与属于鳖臑的体积之比为 2∶1。第四个小立方中两者体积之比尚未知，但它的两小堑堵的构成与原堑堵完全相似，且其长、宽、高为原堑堵的一半。对这两个小堑堵重复上述分割、拼合，即"置余广、袤、高之数各半之，则四分之三又可知也。"如此继续下去，"半之弥少，其余弥细，至细

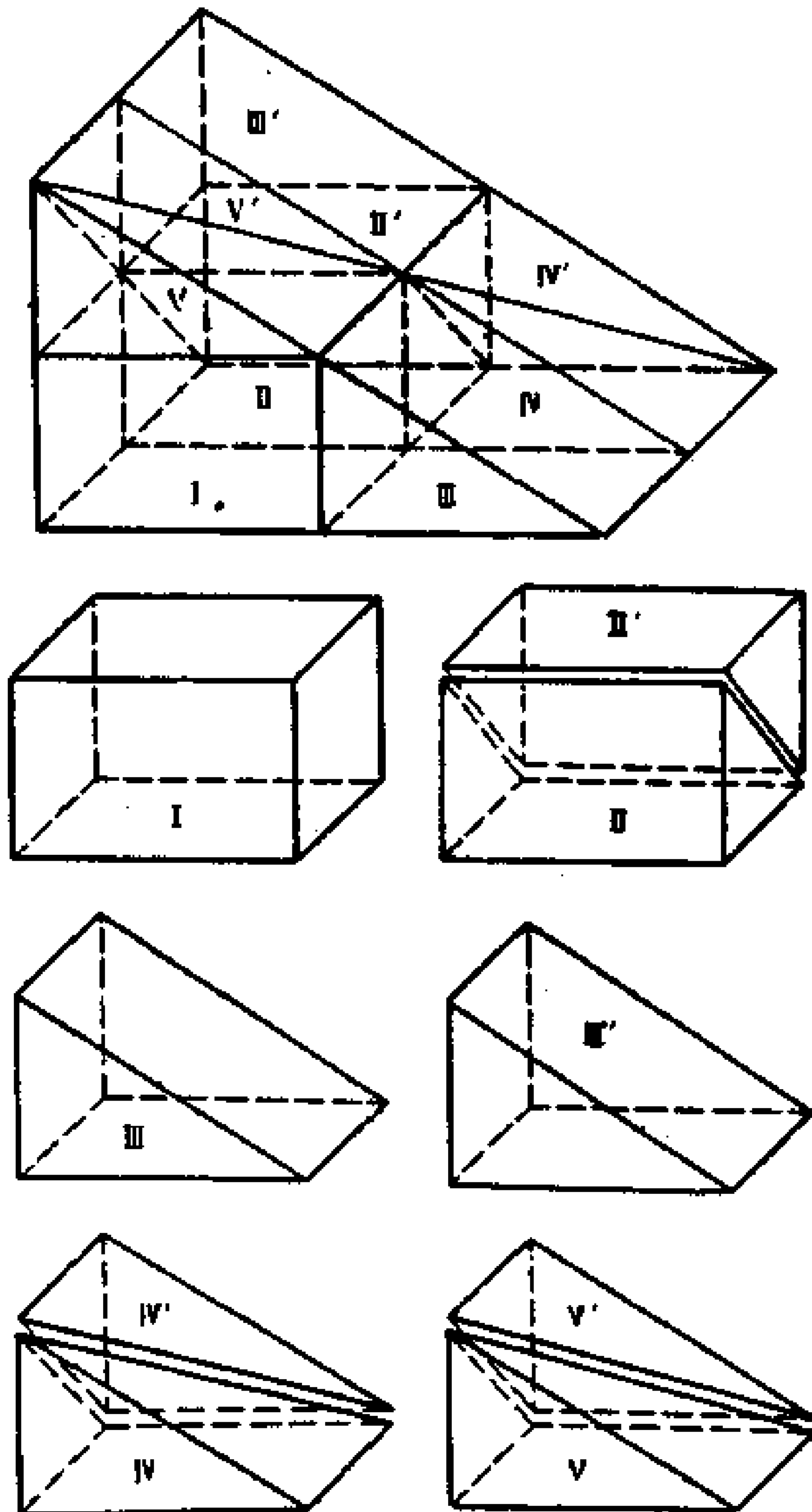


图 38 刘徽原理之证明

曰微，微则无形。由是言之，安取余哉？”从而在整个堑堵中证明了刘徽原理。其中的极限过程是非常明显的。

刘徽原理及阳马、鳖臑体积公式的证明是刘徽体积理论的核心。对其他多面体，刘徽都是将它们分解成有限个长方体、堑堵、阳马、鳖臑，求其体积之和解决之，从而把他的体积理论建立在无穷小分割基础上。19 世纪数学大师高斯曾提出四面体体积的解决不借助无穷小分割是不是不可能的猜想。这一猜想后来成为希尔伯特《数学问题》第三个问题的基础，并由希尔伯特的学生德恩作了肯定性解决。实际上，刘徽早在他们之前 1600 年就开始考虑这个问题。

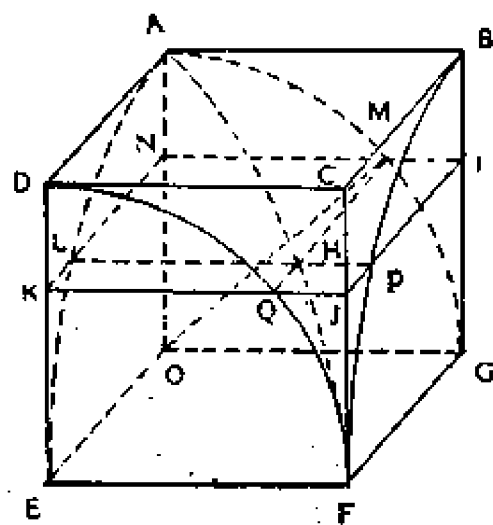
5 祖暅之原理与球体积

祖暅之原理，西方称作卡瓦列利原理，是说等高的两组立体，若它们等高处的截面积相等，则其体积必相等。祖暅之用很简洁的语言概括道：“夫迭棊成立积，缘幂势既同，则积不容异。”(《九章算术·少广章注》)中国古代认识这个原理，经历了漫长的过程。在《九章算术》中，圆柱

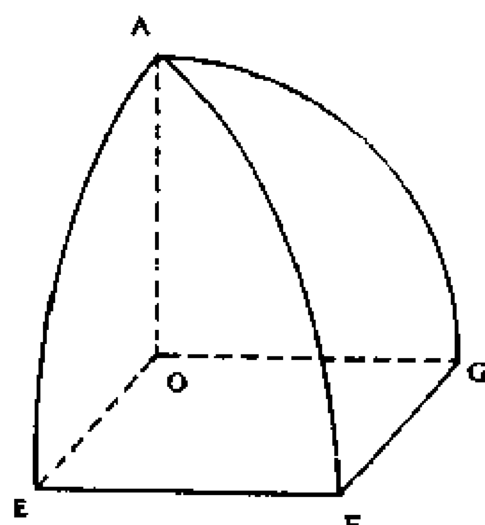
与方柱、圆锥与方锥、圆亭与方亭都是成对地出现，说明是通过比较两者的底面积从后者推导前者的体积的，这是祖暅之原理的雏形。刘徽则认识到，不仅要比较两立体的底面积，而且必须比较任意等高处的截面积。刘徽除了通过这一原理证明了圆锥、圆亭的体积公式外，有两点值得注意。一是他在证明羡除体积公式时提出"推此上连无成不方，故方锥与阳马同实。"(《九章算术·商功章注》)成，训层，就是说，同底等高的方锥与阳马每一层都是相等的方形，故其体积相等。刘徽进而提出，若一立体每一层都被一平面平分，则其体积被平分。刘徽由此解决了若干不同形状的鳖臑的体积公式，接近于提出：任意形状的四面体，其体积为底乘高的$\frac{1}{6}$。由于鳖臑在多面体理论中的关键地位，这一认识是非常重要的。二是他指出了《九章》开立圆术所蕴涵的球体积公式的错误，而错误的原因在于把球与外切圆柱的体积之比当成$\pi:4$。他设计了一种新的立体：用两相等的圆柱体正交，其公共部分称为牟合方盖。刘徽指出，球与外切牟合方盖的体积之比为$\pi:4$。显然，只要求出牟合方盖的体积，则球体积便迎刃而解。刘徽未能求出

牟合方盖的体积，表示“以俟能言者”。

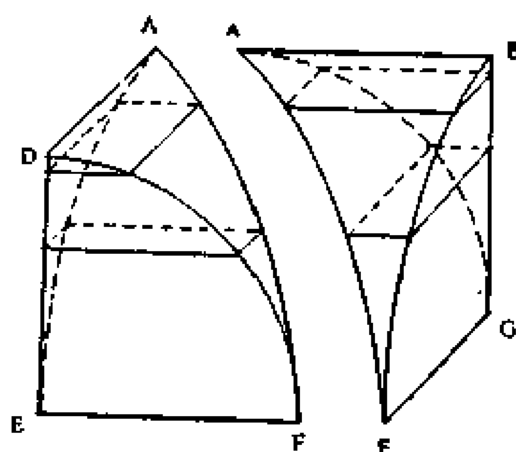
刘徽所期待的数学家便是200年后的祖暅之。这一工作很可能是祖暅之与其父的共同创作。祖冲之在《驳议》中说过：“立员旧误，张衡述而弗改。”可见他研究过球体积问题。祖氏父子在刘徽工作的基础上，继续考虑在一个正方体中用外切于球的两相等圆柱体正交分割出牟合方盖后的剩余部分。李淳风等《九章算术注释》记载祖暅之的方法是：考虑正方体与牟合方盖的$\frac{1}{8}$，即小立方棊$ABCDEFGO$，如图39(1)。按刘徽的分割方法，牟合方盖的$\frac{1}{8}$为$AEFGO$，称为内棊，如图39(2)。立方棊剩余部分被同时分割成三部分：$ADEF$、$ABGF$、$ABCDF$，称为外三棊，如图39(3)、(4)、(5)。考虑高AO上任一点N处的横截面$NIJK$，则其面积为球半径之平方r^2，它由四部分组成：内棊横截面$NMHL$，外三棊横截面$LHQK$、$MIPH$、$HPJQ$。设内棊横截面积为b^2，$ON=a$，那么外三棊横截面积之和应为r^2-b^2，而由勾股形ONM，$r^2-b^2=a^2$，而a^2恰恰等于一个长、宽、高均为r的阳马距顶点为a处的横截面积，如图39(6)。由祖暅之原理，外



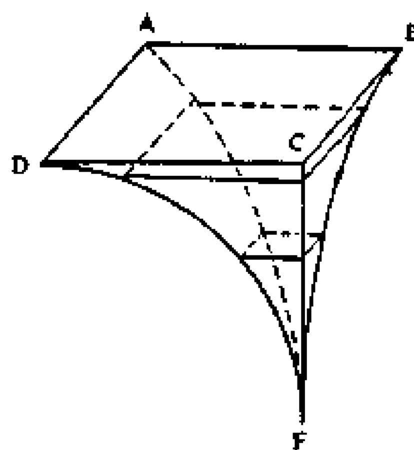
(1)



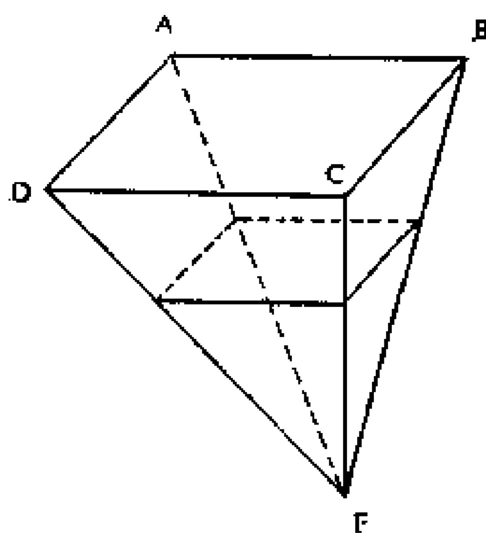
(2)



(3) (4)



(5)



(6)

图 39 牟合方盖之求积

三綦体积之和与上述阳马体积相等，即$\frac{1}{3}r^3$，那么内綦体积为$\frac{2}{3}r^3$，牟合方盖的体积为$\frac{2}{3}D^3$。于是球体积$V=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{2}{3}D^3=\frac{\pi}{6}D^3$，最后圆满地解决了球体积问题。若取$\pi=3$，则球体积为$\frac{1}{2}D^3$。祖暅之开立圆术取后者。

6 尖锥术

刘徽和祖氏父子之后一千余年，极限和无穷小分割思想在中国不但没有明显的进步，甚至没有再达到刘、祖的水平。元赵友钦从圆内接正4边形割圆，只是验证了祖冲之的密率比较精确，理论贡献不大。实际上，刘徽的思想未引起后人的足够重视。十八世纪初，法国传教士杜德美（公元1668—1720年）传入了牛顿、格雷果里创造的三个三角函数的幂级数展开式，但未传入其推导方法。蒙古族数学家明安图（公元？—1766？年）以及董祐诚、项名达、戴煦、徐有壬（公元1800—1860年）、李善兰、夏鸾翔（公元1823—1864年）等以极大的精力研究这类问题

及对数函数、指数函数的幂级数展开式，取得了非常大的成就。他们才智超人，精神可嘉，充分显示了中华民族的优秀分子不甘居他人后的气魄。然而，在西方已进入解析数学时代，不去设法学习他人的先进数学方法，而用初等方法穷几年甚至几十年的心血于几个公式，实在是不可效法的。

清代数学家中，在无穷小分割和极限思想上超过刘徽和祖氏父子的当首推李善兰的尖锥求积术。他在《方圆阐幽》中提出，“当知诸乘方皆可变为面，并皆可变为线”，即若 x 为任意正数，n 为任意正整数，x^n 的数值可以表示成一个平面积，也可以表示成一条直线段。他进而指出，“当知诸乘方皆有尖锥”，“当知诸尖锥有积迭之理”，即当 x 在区间〔0，h〕内时，表示 x^n 的平面积迭成一个尖锥体。他提出了诸尖锥的算法：由平面积 ax^n 积迭起来的尖锥体，高为 h，底面积为 ah^n，其体积为 $\frac{ah^n\times h}{n+1}$。这个命题相当于定积分

$$\int_0^h ax^n dx=\frac{ah^{n+1}}{n+1}.$$

他还提出了相当于

$$\int_0^h a_1 x dx + \int_0^h a_2 x^2 dx + \cdots + \int_0^h a_n x^n dx$$
$$= \int_0^h (a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n) dx$$

的命题。李善兰将他的尖锥求积术应用于圆面

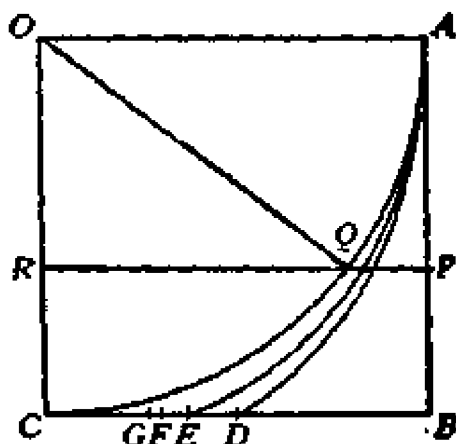


图 40 尖锥术

积的计算。为此，他考虑单位圆的$\frac{1}{4}$。如图 40，$OABC$ 为边长为 1 的正方形，其内容圆的$\frac{1}{4}$为 $OAQC$。为求 $OAQC$ 的面积，他先计算方内圆外部分 $ABCQ$ 的面积。这是一个尖锥。此尖锥是 ABD、ADE、AEF、AFG、…等无数个尖锥之和。诸尖锥之底为：$BD=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}$，$DE=\frac{1}{4}DC=\frac{1}{2\cdot 4}$，$EF=\frac{1}{6}EC=\frac{3}{2\cdot 4\cdot 6}$，$FG=\frac{1}{8}FC=\frac{3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}$，…依尖锥求积术，尖锥 $ABCQ$

的面积应为：

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5}+\frac{3}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{7}+\frac{3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{1}{9}+\cdots.$$

因此，单位圆的面积为

$$\pi=4-4\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5}+\frac{3}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{7}+\frac{3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{1}{9}+\cdots\right).$$

在《对数探源》中，李善兰还用尖锥术解决了对数函数的幂级数展开式。他求出了一尖锥合积

$$L(y)=by+\frac{by^2}{2h}+\frac{by^3}{3h^2}+\frac{by^4}{4h^3}+\cdots.$$

并证明了当 $y_1, y_2, y_3, \cdots$ 成等比级数时，与其相对应的 $L(y_1), L(y_2), L(y_3), \cdots$ 成等差级数，故 $L(y)$ 具有对数的性质。

若 $by=1$，$y=\frac{n-1}{n}h$，则

$$L\left(\frac{n-1}{n}h\right)=\frac{n-1}{n}+\frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{n-1}{n}\right)^3+\cdots$$

这是 n 的自然对数 $\ln n$，它相当于定积分

$$\int_0^{\frac{n-1}{n}h}\frac{1}{h-y}dy=\ln h-\ln\left(h-\frac{n-1}{n}h\right)=\ln n$$

李善兰的这些工作大体与欧洲牛顿、莱布尼茨完成微积分学之前数学家们的工作相类，是在他接触西方微积分学前完成的。尽管完成这一工作的预备知识中有明末清初以来传入的西方初等数学，但总的说来，是在中国传统数学基础上，未受西方微积分学思想影响的情况下独立完成的创造性工作。显然，那种认为中国古典数学无法发展为现代数学的看法是站不住脚的。

夏鸾翔在幂级数展开方面也有杰出的工作，并创立了计算一部分椭圆曲线绕长轴（或短轴）旋转所形成的曲面面积的积分的级数展开式，不过这是在《代微积拾级》的基础上完成的。



中国古代数学的特征与意义

ZHONG GUO
WEN HUA SHI
ZHI SHI
CONG SHU

最后，作为这本小册子的总结，简述一下中国古典数学的特征、在世界数学史上的地位及其现实意义。

1 中国古代数学的特征

数学是研究客观事物的空间形式与数量关系的科学。它不受任何时间和空间的限制，强烈地显现这一本质属性。然而，在古代各个时期不同的文化传统中，数学的表现形式往往也不尽相同，各自呈现出自己的特征。比如中国古典数学在表现形式、思维模式、与社会实际的关系、研究的中心以及发展的历程等许多方面与其他文化传统，特别是古希腊数学有较大的区别。

首先是其表现形式，这里主要指数学经典的著作形式。古希腊数学常常采取抽象的公理化的形式，而中国古典数学则是以术文统率例

题的形式。两种不同的形式，代表着迥然不同的两种风格。这两种形式和风格同样可以阐发数学理论的基础。有人往往忽略了这一点，把中国古代数学著作笼统地概括成应用问题集的形式。只要仔细分析、比较一下数学著作本身，就不难发现这个结论是极不正确的。比如最重要的著作《九章算术》，它的九章中，方田、粟米、少广、商功、盈不足、方程六章的全部及衰分、均输、勾股三章的部分，要么先列出一个或几个例题，然后给出十分抽象的"术"；要么先列出十分抽象的"术"，然后给出若干例题。这里的"术"都是些公式或抽象的计算程序；前者的例题只有题目及答案，后者的例题则包括题目、答案与"术"。所谓"术"就是阐述各种算法及具体应用，类似于后世的细草。《九章算术》中只有约五分之一的部分，即衰分、均输、勾股三章的约 50 个题目，可以说是应用问题集的形式。由此就得出《九章算术》是一部应用问题集的结论是不恰当的，正确的提法应是术文统率例题的形式。后来的《孙子算经》等的主体应该说是应用问题集的形式，但把一些预备知识放到了卷首。宋元数学高潮中的著作，贾宪《黄帝九章算经细草》的抽

象性更高于《九章算术》，其它著作由于算法更为复杂，算法的抽象性有时达不到《九章》的程度，但是也作了可贵的努力，如《数书九章》的"大衍总数术"及其核心"大衍求一术"就是同余式解法的总术；"正负开方术"用抽象的文字阐述了开四次方的方法后，又声明"后篇效此"，说明也是普遍方法。朱世杰的两部著作都把大量预备知识、算法放在卷首，《四元玉鉴》的卷首还载有天元术、二元术、三元术、四元术的解法范例。《测圆海镜》更是把"圆城图式"及后面要用到的定义、命题列入卷一的"识别杂记"。因此，总的说来，算法（术）是解应用题的关键，"术"自然就成为中国古代数学的核心。中国数学著作是以算法为核心，算法统率例题的形式。

其次是关于数学理论的研究。古希腊数学使用演绎推理，使数学知识形成了严谨的公理化体系。许多学者夸大了中国古算与古希腊数学的差别，认为中国古代数学成就只是经验的积累，没有推理，尤其是没有演绎推理。这是对中国古代数学缺乏起码了解的肤浅之见。遗憾的是，这种肤浅之见被某些科学泰斗所赞同而颇为流行，甚至成为论述现代科学没有在中国

产生的出发点。诚然，中国古代数学与哲学结合得不像古希腊那么紧密，中国古代数学大家也不像古希腊数学大师那样大多是思想界的头面人物或思想流派的首领。一般说来，中国思想家对数学的兴趣远逊于古希腊的同仁，先秦诸子中即使数学修养最高的墨家，其数学成就也难望古希腊思想家的项背。同样，中国数学家，就整体而言，对数学理论研究的关注，也远不如古希腊数学家。比如，《九章算术》和许多数学著作对数学概念没有定义，许多数学问题的表述，并不严谨。这就要求读者必须站在作者的立场上，与作者共处于一个和谐的体系中，才能理解其内容，这或多或少也阻碍了数学理论的发展。硬说中国古代与古希腊同样重视数学理论研究，固然是不妥的。反之，说中国古代数学没有理论，没有推理，也是不符史实的。《周髀算经》记载，先秦数学家陈子在教诲荣方时，指出他之所以对某些数学原理不能理解，在于他"之于数未能通类"，他认为数学的"道术"，"言约而用博"，必须做到"能类以合类"。陈子大约处于《九章算术》编纂过程的初期。实际上，《九章》的编纂正是贯穿了"通类"、"类以合类"的思想。《九章算

术》的作者把能用同一种数学方法解决的问题归于一类，提出共同的、抽象的“术”，如方田术、圆田术、今有术、衰分术、返衰术、少广术、开方术、盈不足术、均输术、方程术、勾股术等等，又将这些术及例题按其性质或应用分成方田、粟米、衰分、少广、商功、均输、盈不足、方程、勾股九类。刘徽进一步挖掘《九章》许多方法的内在联系，又将衰分术、均输术、方程新术等归结到今有术。刘徽正是通过“事类相推”，找出了各种方法的归宿，发现数学知识是“枝条虽分而同本干”，并“发自一端”的一株大树，形成了自己完整的数学理论体系。贾宪总结开方法，创造开方作法本源。杨辉总结出勾股生变十三名图，李冶探讨了各种容圆关系，给出600多条公式，也都是通过归纳、类比做到通类，进而“类以合类”，进行数学的理论概括。

通过“合类”，归纳出抽象的公式之后，将这些公式应用于解某些数学问题，实际上是从一般到特殊的演绎过程，这里要特别谈一下中国古代数学中有没有演绎推理的问题。大家知道，数学知识的获得，要通过类比、归纳、演绎各种推理途径，而证明一个数学命题的正确性，则必

须依靠演绎推理。中国古代数学著作正是大量使用演绎推理。以中国古代最为发达的高次方程这一分支为例，刘徽、王孝通都提出了方程的推导过程，金元数学家更创造了设未知数列方程的天元术，李冶将用天元术列方程所需要的定理、公式大都在卷一的“识别杂记”中给出。刘徽、王孝通、秦九韶、李冶、朱世杰等推导高次方程的过程都是依靠演绎推理的，因而是正确的。至于刘徽用极限思想和无穷小分割对圆面积公式的证明，对锥体体积公式的证明；用出入相补原理对解勾股形诸公式的证明，对大量面积、体积公式的证明，对开方术的证明；利用齐同原理对方程术、盈不足术及许多算法的证明，都是演绎推理的典范。只要不带偏见，都会认识到刘徽在拓展数学知识时以归纳、类比为主，而在论证《九章算术》的公式、算法的正确性时，在批驳《九章算术》的某些错误时，则以演绎推理为主，从而把他自己掌握的数学知识建立在可靠的理论基础之上。

说数学研究与思想界结合得不密切，是就整体而言的，并不是说每个数学家都如此，比如刘徽就例外。他深受魏晋辩难之风的影响，他对

《九章算术》"析理以辞，解体用图"，"析理"正是辩难之风的要件，刘徽析理的原则、析理的方法都是与当时辩难之风合拍的。当然，即使是刘徽对许多数学概念的探讨还没达到古希腊那么深入的地步。比如，刘徽将无穷小分割引入数学证明是前无古人的贡献，却从未考虑过潜无穷小与实无穷小的区别。不过，这未必是坏事。古希腊数学家无法圆满解决潜无限与实无限的问题，不得不把无穷小概念排除在数学研究之外，因此，他们在证明数学命题时，从未使用过极限思想和无穷小分割。刘徽则不然，他认为圆内接正多边形边数无限增多，最后必定"与圆周合体"，因此可以对与圆周合体的正多边形进行无穷小分割并求其面积之和；他认为对阳马与鳖臑组成的堑堵进行无穷分割，可以达到"微则无形"的地步；刘徽在极限思想的运用上远远超过了古希腊的同类思想，达到了文艺复兴前世界数学界的最高峰。古希腊数学家认为正方形的对角线与其边长没有公度，即$\sqrt{2}$与 1 没有公度，导致数学史上的第一次危机，使古希腊数学转向，把计算排除在数学之外，只注重空间形式的研究，因而在无理数面前束手无策。而刘徽、

祖冲之等则不然，他们对"开之不尽"的"不可开"的数，敢于继续开方，"求其微数"，以十进分数无限逼近无理根的近似值。没有陷入哲学的争论，从数学计算的实际出发，使中国数学家能够绕过曾导致希腊数学改变航向或裹足不前的暗礁，在数学理论和实践上达到古希腊数学家所不曾达到的高度。

长于计算，以算法为中心，是中国古代数学的显著特点。古希腊数学只考虑数和形的性质，而不考虑具体数值。比如，他们很早就懂得，任何一个圆的周长与直径之比是个常数，但这个常数的数值，几百年无人问津，直到阿基米德才求出其值的范围。相反，中国古典数学几乎不研究离开数量关系的图形的性质，而通过切实可行的方法把实际问题化为一类数学模型，然后用一套程序化即机械化的算法求解。算经中的"术"全是计算公式与计算程序，或应用这些公式、程序的细草，所有的问题都要算出具体数值作为答案，即使几何问题，也要算出有关因素的长度、面积、体积。这就是几何方法与算法相结合，或几何问题的算法化。刘徽说："以法相传，亦犹规矩、度量可得而共"(《九章算术注·

序》)，清楚地表达了中国古算形、数结合的特点。《九章算术》的开方术、方程术、盈不足术、衰分术、均输术，刘徽计算圆周率的割圆术、计算弧田面积近似值的方法，贾宪求贾宪三角各廉的增乘方法，贾宪开创而秦九韶使之完备的求高次方程正根的正负开方术，秦九韶的同余式解法，朱世杰的四元术，等等，都有相当复杂的计算程序。数学运算的程序化使复杂的计算问题易于掌握，即使不懂其数学原理，也可掌握其程序，于是产生了程序的辅助用表"立成"。上述这些程序都具有完全确定性、对一整类问题适用性及有效性等现代算法的三个特点。许多程序几乎可以一字不差地搬到现代电子计算机上实现。

先进的记数制度，强烈的位置值制是促成中国算法理论充分发展的重要因素。中国最早发明了十进位置值制记数法，这种记数法十分有利于加减乘除四则运算及分数、小数的表示。加之汉语中数字都是单音节，便于编成口诀，促成筹算乘除捷算法向口诀的转化。而筹算的使用使分离系数表示法成为顺理成章。线性方程组的分离系数表示法、开方式的记法、天元多项

式、四元式的记法，实际上也是一种位置值制。未知数的幂次完全由其在表达式中的位置决定，而不必写出未知数本身，如开方式中，自上而下依次是“商”、“实”（常数项）、“方”（一次项）、“一廉”、“二廉”（二、三次项系数）……隅（最高次项系数）。天元式也是如此，只是因为运算中有正幂也有负幂，才需要在常数项旁标一“太”字，或在一次项旁标一“元”字，未知数幂次完全由与“太”或“元”的相对位置决定。这种表示法特别便于开方或加减乘除运算，尤其是用天元的幂次乘（或除），只要上下移动“太”或“元”字的位置即可。

数学理论密切联系实际，是中国古代数学的又一显著特征。不能把古算经的所有题目都看成日常生产生活的应用题，有些题目只是为了说明算法的例题，《九章算术》和《测圆海镜》中都有此类题目。但是，中国古算确实是以应用为目的的，这是与古希腊数学的显著区别之一。后者公开申明不以实际应用为目的，而是看成纯理念的精神活动，欧几里得几乎抹去了《几何原本》的实际来源的所有蛛丝马迹。而中国数学家却从不讳言研究数学的功利主义目的。自《汉

书·律历志》到刘徽、秦九韶，都把数学的作用概括为“通神明”、“类万物”两个方面。这里神明的意义既可作神秘主义来理解，也可以看作说明物质世界的变化性质的范畴，或二者兼而有之。《九章算术》刘徽为其注没有任何神秘主义的成份，对通神明的作用也没作任何阐发，刘徽倒是明确指出了《九章算术》各章在实际生产生活中的应用范围：方田以御田畴界域，粟米以御交质变易，衰分以御贵贱禀税，少广以御积幂方圆，商功以御功程积实，均输以御远近劳费，盈不足以御隐杂互见，方程以御错糅正负，勾股以御高深广远，显然是“类万物”方面。秦九韶把“通神明”看作数学作用之大者，并且其理解是神秘主义与世界变化的性质二者兼而有之的，而把类万物、经世务看成数学作用之小者。尽管他表示要将数学“进之于道”，但他的数学研究实践使他感到对于大者仍“肤末于见”，而注重于小者，认识到“数术之传，以实为体”，因此“设为问答以拟于用”。他的《数书九章》除第一问外，大都是实际生活、生产及各种工程的应用题，反映南宋经济活动之翔实远胜于《九章算术》等著作对当时现实经济活动的反映。总之，

中国数学密切联系实际，并在实际应用中得到发展。也许正因为有这个长处，中国数学从《九章算术》到宋元高潮，基本上坚持了唯物主义传统，未受到数字神秘主义的影响。明朝著作有一些神秘主义的东西，具有穿靴戴帽的性质，但仍不能改变以实际应用为目的这一总的特征。

统治者对数学的态度造成了中国与希腊数学不同的发展特点。古希腊统治者非常重视数学，造成希腊数学有很强的连续性、继承性。而中国古代的统治者，除个别者外，大都不重视数学。秦始皇统一中国，较为重视数学的墨家遭到镇压，汉朝以后独尊儒术，儒法合流，读经学礼，崇尚文史，成为一种社会风气。由于数学对国计民生的重大作用，统治阶级又不得不承认"算术亦六艺要事"(《颜氏家训·杂艺》)，但却主张"可以兼明，不可以专业"(同上)。数学一直被视为"九九贱技"。刘徽哀叹"当今好之者寡"，(《九章算术注·序》)秦九韶说"后世学者鄙之不讲"，(《数书九章序》)李冶以大儒研究数学，自谓"其悯我者当百数，其笑我者当千数"。(《测圆海镜序》)刘徽所处之魏晋，秦、李所处之宋元，都是中国数学兴盛时期，尚且如此，何论其他！

二十四史，林林总总，列入无数帝王将相，以及文学家、思想家，甚至烈女节妇，却没有为一个数学家立传，祖冲之、李冶有传，却是以文学家、名臣的身份入传的。社会的需要，以及世代数学家不计悯笑，刻苦钻研，自汉迄元，使中国数学登上了世界数坛的一个又一个高峰，然而中国数学的发展常常大起大落，艰难地前进。更使人觉得奇怪的是，高潮往往出现在战乱时期，如战国时期《九章算术》主要成就的奠基，魏晋南北朝数学理论的建立，宋辽金元筹算数学的高潮；相反，低谷往往出现在大一统的太平盛世，如唐、明两代，不仅数学建树甚少，甚至到了大数学家看不懂前代成果的可笑地步！这当然丝毫不意味着战乱、分裂比安定、统一更有利于数学的发展，而是因为战乱时期，儒家思想的统治地位往往受到冲击，社会思潮较为活跃，思想比较解放。同时由于战乱，读经入仕的道路被堵，知识分子稍稍能按自己的兴趣和社会的需求发挥自己的才智，所蕴藏的数学才能也得到较充分展示，致使处于夹缝中的数学研究状况反而比大一统的太平盛世更好一些罢了。

2　中国古算的地位和意义

中国古代数学成就辉煌，这已日益得到国人和世界学术界有识之士的承认。我们反对随意拔高古人，制造世界第一的沙文主义作法，同样，我们也反对不顾事实，以希腊数学为唯一模式，贬低中国数学的错误态度，更反对对中国古代数学一无所知，就妄称中国在数学史上交了白卷的民族虚无主义。我们认为，古希腊人对数学确实作出过光辉的贡献，对世界数学思想产生过巨大的影响。但是，同样无可否认的事实是，在公元前 2 世纪前后，希腊数学衰微的时候，中国数学（以及后来发展起来的印度数学、阿拉伯数学）占据了世界数学舞台的重心。从公元前一、二世纪《九章算术》成书到 14 世纪初，中国数学的许多领域长期在世界上领先，且整体水平也居于世界前列。这不仅是世界数学研究重心在地域上的大转移，而且也是数学研究方向的大转折。从此，以算法研究为主取代了以几何研究为主的状况。中国的算法成就通过各种途径传入西方，对欧洲文艺复兴时期数学的

发展起到了不可估量的影响。正是中国算法与古希腊几何学相结合，导致了解析几何学的产生，为常量数学转变为变量数学作出了贡献。

中国古代数学成就不仅是进行爱国主义教育的优秀教材，而且许多成就本身对当前的数学教学仍具有现实意义。事实上，中国古代解决某些问题的方法比现行数学教科书中的方法要优越得多。更为重要的是，中国古代数学的思想和方法对当前的数学研究仍有启迪作用。有的数学大师“把构造性与机械化的数学看作是可以直接施用于现代计算机的数学”，而中国数学就是这样一种数学。吴文俊先生汲取中国古代数学的思想和方法，在几何定理的机器证明的研究上取得了举世瞩目的成就。他预言：“继续发扬中国古代传统数学的机械化特色对数学各个不同领域探索实现机械化的途径，建立机械化的数学，则是本世纪以至可能绵亘整个 21 世纪才能大体趋于完善的事”。(《现代数学新进展序》)“《九章》所蕴含的思想影响，必将日益显著，在下一世纪中凌驾于《原本》思想体系之上，不仅不无可能，甚至说是殆成定局。”(《汇校九章算术序》)

[General Information]
书名= 未命名图书
作者=
页数= 198
SS号= 0
出版日期=